Capitolul 1

PUNCTE REMARCABILE ASOCIATE UNUI TRIUNGHI

1.1 CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI TRIUNGHI

„Drumul de o mie de mile începe cu primul pas."- Lao Tse[1]

Punctul de concurenţă al medianelor unui triunghi ABC se numeşte ***centrul de greutate*** al triunghiului $ABC.$ Centrul de greutate al unui triunghi este un punct interior triunghiului. În cele ce urmează, vom nota centrul de greutate al triunghiului ABC cu G, iar cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB.

Teorema 1 *Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la o treime de mijlocul laturii opuse corespunzătoare şi la două treimi de vârful corespunzător.*

Demonstraţie. Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC (Figura 1.1). Teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul AM_aC pentru transversa $B{-}G{-}M_b$

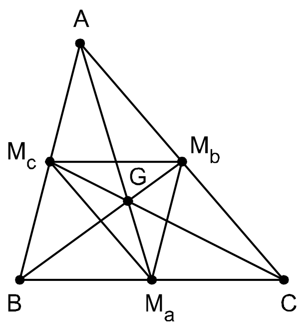

Figura 1.1: Centrul de greutate al unui triunghi

[1] Lao Tse (sec. IV î.e.n.) – filosof chinez, figură centrală în religia taoistă

ne dă:

$$\frac{GA}{GM_a} \cdot \frac{M_bC}{M_bA} \cdot \frac{BM_a}{BC} = 1,$$

sau $GA = 2GM_a$, deci $GM_a = \frac{1}{3}AM_a$ şi $GA = \frac{2}{3}AM_a$. $\square$

Teorema 2 *Distanţele de la centrul de greutate al unui triunghi la vârfurile triunghiului sunt egale cu:* $\frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2}$.

Demonstraţie. Deoarece $GA = \frac{2}{3}AM_a$, rezultă

$$GA = \frac{2}{3}AM_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

unde am utilizat teorema medianei. Analog, $GB = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$ şi $GC = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. $\square$

Teorema 3 *Distanţele de la centrul de greutate al unui triunghi la laturile triunghiului sunt egale cu:* $\frac{1}{3}h_a, \frac{1}{3}h_b, \frac{1}{3}h_c$, *unde* h_a, h_b, h_c *sunt lungimile înălţimilor triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie G_a şi H_a proiecţiile punctelor G, respectiv A pe BC. Din asemănarea triunghiurilor GG_aM_a şi AH_aM_a rezultă

$$\frac{GG_a}{h_a} = \frac{GM_a}{AM_a} = \frac{1}{3},$$

deci $GG_a = \frac{1}{3}h_a$. $\square$

Teorema 4 *Centrul de greutate al unui triunghi aparţine dreptei lui Euler a triunghiului.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler”. $\square$

Teorema 5 *Centrul de greutate, centrul cercului circumscris şi ortocentrul unui triunghi* ABC *sunt puncte coliniare, iar*

$$GO = \frac{1}{2}HG = \frac{1}{3}OH.$$

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler”. $\square$

Teorema 6 *Dacă* L *este punctul lui Longchamps al unui triunghi* ABC, *atunci*

$$GO = \frac{1}{3}OL.$$

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Longchamps”. $\square$

Teorema 7 *Centrul de greutate al unui triunghi ABC aparţine dreptei lui Nagel corespunzătoare.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Nagel”. □

Teorema 8 *Dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, atunci*

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.10]. □

Teorema 9 *Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este adevărată relaţia:*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right). \tag{1.1}$$

Demonstraţie. Din teorema medianei scrisă vectorial avem: $2\overrightarrow{MM_a} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Din $\frac{GA}{GM_a} = 2$, rezultă

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MM_a}}{1+2} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}.$$

□

Observaţia 10

i) Dacă $M \equiv G$, relaţia (1.1) devine:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

ii) Dacă $M \equiv O$ se obţine *relaţia lui Sylvester*:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.$$

iii) Dacă $M \equiv A$, relaţia (1.1) devine: $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$.

Teorema 11 *Coordonatele baricentrice absolute ale centrului de greutate al unui triunghi ABC sunt $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.*

Demonstraţie. Rezultă din proprietatea precedentă. □

Teorema 12 *Afixul centrului de greutate al unui triunghi ABC este egal cu*

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Demonstraţie. Rezolvarea este analoagă cu cea din Teorema 9. □

Teorema 13 *Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este adevărată relaţia:*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3} + 3MG^2.$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.10]. □

Teorema 14 *În orice triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Demonstraţie. Din teorema 13 pentru $M \equiv G$, rezultă concluzia. □

Teorema 15 *În orice triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$GA^4 + GB^4 + GC^4 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{9}.$$

Demonstraţie. Ridicând la pătrat relaţia $AG^2 = \frac{1}{9}[2(b^2 + c^2) - a^2]$ rezultă:

$$AG^4 = \frac{1}{81}[4(b^4 + c^4 + 2b^2c^2) + a^4 - 4a^2(b^2 + c^2)],$$

de unde: $GA^4 + GB^4 + GC^4 = \frac{a^4+b^4+c^4}{9}$. □

Teorema 16 *O dreaptă d, care nu este paralelă cu BC şi trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC, intersectează laturile AB şi AC în punctele M, respectiv N. Atunci:*

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

Demonstraţie. Fie M_a mijlocul laturii BC, iar D, E, F, L proiecţiile punctelor

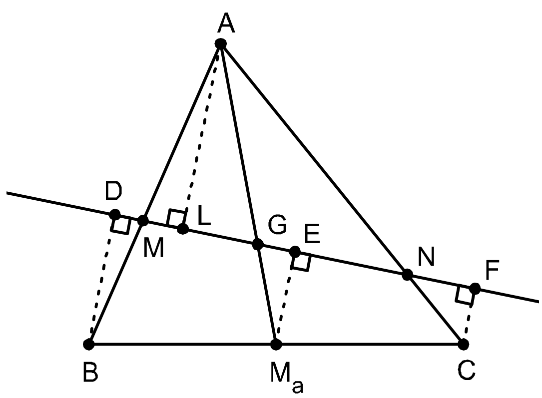

Figura 1.2: $G \in d$

B, M_a, C, respectiv A pe dreapta d (Figura 1.2).

Avem, $M_aE = \frac{BD+CF}{2}$, $GA = 2GM_a$, $AL = 2M_aE$, (deoarece triunghiurile ALG şi M_aEG sunt asemenea), de unde rezultă că: $AL = BD + CF$. Din asemănarea triunghiurilor BDM şi ALM, respectiv a triunghiurilor CFN şi ALN rezultă:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BD}{LA} \text{ şi } \frac{CN}{NA} = \frac{CF}{LA},$$

deci:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{BD}{LA} + \frac{CF}{LA} = \frac{LA}{LA} = 1.$$

Dacă $d \parallel BC$, problema este banală. □

Teorema 17 *Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC. Prin punctul P ducem paralelele PL, PM şi PN la laturile BC, AC, respectiv AB ($L \in AB, M \in BC, N \in AC$). Dacă ariile triunghiurilor BPL, CPM şi APN sunt egale, atunci P este centrul de greutate al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $\{L'\} = PL \cap AC$ (Figura 1.3). Atunci,

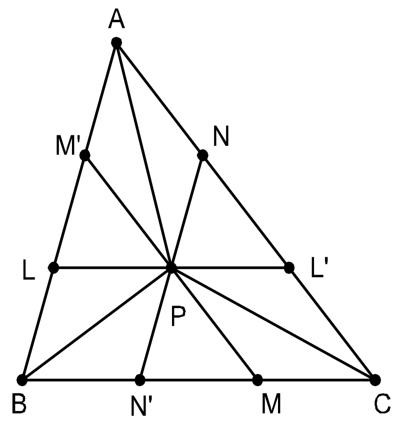

Figura 1.3: $A_{[BPL]} = A_{[CPM]} = A_{[CPL']}$

$$A_{[BPL]} = A_{[CPM]} = A_{[CPL']}.$$

Cum $LL' \parallel BC$, rezultă că înălţimile din B şi C ale triunghiurilor BPL şi respectiv CPL' sunt egale şi deci $PL = PL'$, adică P aparţine medianei ce pleacă din A. Analog, se arată că punctul P aparţine şi celorlalte mediane, deci P este centrul de greutate al triunghiului ABC. Reciproca este evident adevărată. □