1.14 PUNCTUL LUI STEINER

„Adevărul nu străluceşte decât în ochii celui care l-a căutat îndelung, destul de îndelung ca să merite să–l vadă.” - Henri Lebesgue[21]

Teorema 332 *Paralelele duse prin vârfurile unui triunghi la laturile respective ale primului triunghi Brocard sunt concurente într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $A_1B_1C_1$ primul triunghi Brocard al triunghiului ABC şi S punctul de intersecţie dintre paralelele duse din B şi C la laturile A_1C_1, respectiv A_1B_1 (Figura 1.81). Atunci, $m(\widehat{BSC}) = 180° - m(\widehat{B_1A_1C_1}) = 180° - m(\widehat{BAC})$ (vezi

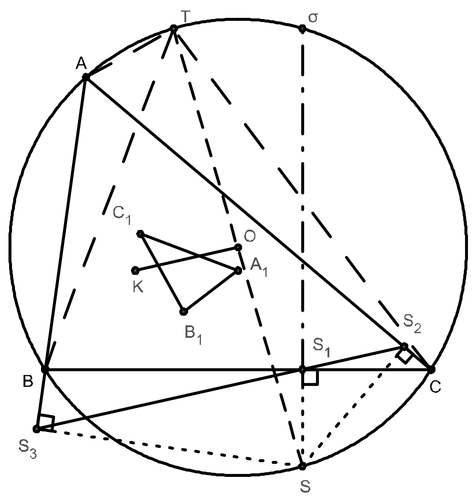

Figura 1.81: Punctul lui Steiner. Punctul lui Tarry

„Triunghiurile Brocard”), relaţie ce arată că patrulaterul $ABSC$ este inscriptibil, deci S este pe cercul circumscris triunghiului ABC (i). Analog, fie S' punctul de intersecţie dintre paralelele duse prin B şi A la A_1C_1, respectiv B_1C_1. Atunci,

$$m(\widehat{BS'A}) = 180° - m(\widehat{B_1C_1A_1}) = 180° - m(\widehat{BCA}),$$

adică punctul S' aparţine cercului circumscris triunghiului ABC (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $S \equiv S'$. □

Observaţia 333 *Punctul S de concurenţă al celor trei paralele se numeşte* ***punctul lui Steiner***[22] *al triunghiului ABC.*

[21] Henri Lebesgue (1875 -1941) – matematician francez, contribuţii importante în analiza matematică

[22] Jakob Steiner (1796-1863) – matematician elveţian, profesor la Universitatea din Berlin, contribuţii importante în geometrie

Teorema 334 *Punctele lui Steiner* (S) *şi Lemoine* (K) *al triunghiului* ABC *sunt puncte omoloage în triunghiul* ABC, *respectiv* $A_1B_1C_1$- *primul triunghi Brocard al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Punctul S aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, K aparţine cercului circumscris primului triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ (vezi „Triunghiurile lui Brocard"), iar

$$m(\widehat{SBC}) = m(\widehat{KA_1C_1}) = m(\widehat{KB_1C_1}),$$

deoarece $BS \parallel A_1C_1$ şi $KA_1 \parallel BC$. □

Teorema 335 *Punctul lui Steiner al triunghiului* ABC *este punctul diametral opus în cercul circumscris triunghiului* ABC *punctului lui Tarry.*

Demonstraţie. Punctul lui Tarry (T) se află la intersecţia perpendicularelor coborâte din vârfurile triunghiului ABC pe laturile respective ale primului triunghi Brocard. Deoarece

$$m(\widehat{TBS}) = m(\widehat{TAS}) = m(\widehat{TCS}) = 90^\circ,$$

rezultă că punctul lui Tarry este punctul diametral opus lui S în cercul circumscris triunghiului ABC. □

Teorema 336 *Dreapta lui Simson a punctului lui Steiner în raport cu un triunghi* ABC *este paralelă cu dreapta* OK.

Demonstraţie. Fie S_1, S_2, S_3 proiecţiile punctului lui Steiner S pe laturile BC, CA, respectiv AB. Avem

$$m(\widehat{S_2S_1C}) = m(\widehat{S_2SC}) = m(\widehat{A_1B_1O}) = m(\widehat{A_1KO}) = \theta,$$

deoarece $SS_2 \parallel OB_1$ şi $SC \parallel A_1B_1$, iar patrulaterul OB_1KA_1 este inscriptibil. Atunci, $m(\widehat{KOA_1}) = 90^\circ - \theta = m(\widehat{SS_1S_2})$ şi deoarece $SS_1 \parallel A_1O$, rezultă că $S_1S_2 \parallel OK$. □

Teorema 337 *Fie* K *punctul lui Lemoine şi* O *centrul cercului circumscris unui triunghi* ABC. *Paralela dusă prin* A *la dreapta* OK *intersectează cercul circumscris triunghiului* ABC *în punctul* σ. *Perpendiculara dusă din punctul* σ *pe dreapta* BC *trece prin punctul lui Steiner al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie σ' punctul de intersecţie dintre perpendiculara dusă din punctul lui Steiner (S) pe dreapta BC şi cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.81). Dreapta $A\sigma'$ este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului lui Steiner (vezi „Dreapta lui Simson"), de unde $A\sigma' \parallel OK$ (cf. th. 336), deci $\sigma' \equiv \sigma$. □

Observaţia 338 *Teorema de mai sus ne dă un mod practic de construcţie al punctului lui Steiner al unui triunghi: ducem prin vârful* A *paralela la dreapta* OK *şi notăm cu* σ *punctul de intersecţie al acesteia cu cercul circumscris triunghiului* ABC; *din punctul* σ *ducem perpendiculara pe latura* BC, *al doilea punct de intersecţie al acesteia cu cercul circumscris este punctul lui Steiner.*

Teorema 339 *Dreapta care trece prin punctul lui Tarry şi punctul σ, determinat de intersecţia paralelei duse prin A la dreapta OK, este paralelă cu dreapta BC.*

Demonstraţie. Deoarece ST este diametru în cercul circumscris, $m(\widehat{T\sigma S}) = 90°$, şi cum $S\sigma \perp BC$, rezultă $T\sigma \parallel BC$. □

Teorema 340 *Dreapta $O\Omega$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC, iar Ω şi Ω'' sunt primul, respectiv cel de-al treilea punct al lui Brocard..*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.14]. □

Teorema 341 *Dreapta $O\Omega'$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega'\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC, iar Ω şi Ω'' sunt primul, respectiv cel de-al treilea punct al lui Brocard.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.14]. □

1.15 PUNCTUL LUI TARRY

„Dincolo de pamânt şi infinit
Cătam să aflu cerul unde vine.
Şi-un glas solemn atunci s-a auzit
Şi cerul şi infernul sunt în tine." - Omar Khayyam[23]

Punctul lui Tarry[24] al triunghiului ABC este punctul diametral opus punctului lui Steiner în cercul circumscris triunghiului ABC.

Teorema 342 *Perpendicularele duse din vârfurile triunghiului ABC pe laturile opuse ale primului triunghi Brocard corespunzător triunghiului ABC sunt concurente în punctul lui Tarry al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $A_1B_1C_1$ primul triunghi Brocard al triunghiului ABC, iar S punctul lui Steiner, T punctul lui Tarry (Figura 1.81). Avem, $m(\widehat{TBS}) = 90°$, deci $BT \perp BS$ şi cum $BS \parallel A_1C_1$ rezultă $BT \perp A_1C_1$. Analog se arată că $AT \perp B_1C_1$ şi $CT \perp A_1B_1$. □

Teorema 343 *Dreapta lui Simson a punctului lui Tarry în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe dreapta OK.*

[23] Omar Khayyam (1048-1122) – matematician, poet, filosof, astronom persan, contribuţii în algebră şi geometrie

[24] Gaston Tarry (1843-1913) – matematician francez, contribuţii în geometrie şi teoria numerelor