## 1.16 PUNCTE IZODINAMICE

„Geometria practică dedusă din experienţă nu se confundă cu geometria axiomatică. Întrebarea dacă geometria practică a universului este euclidiană sau nu, are o importanţă evidentă şi răspunsul poate să fie dat numai de experienţă." – Albert Einstein[25]

Punctul $S$ din planul triunghiului $ABC$ pentru care $a \cdot SA = b \cdot SB = c \cdot SC$ (unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor $BC, CA$, respectiv $AB$) se numeşte ***punct izodinamic*** al triunghiului $ABC$ (Figura 1.82).

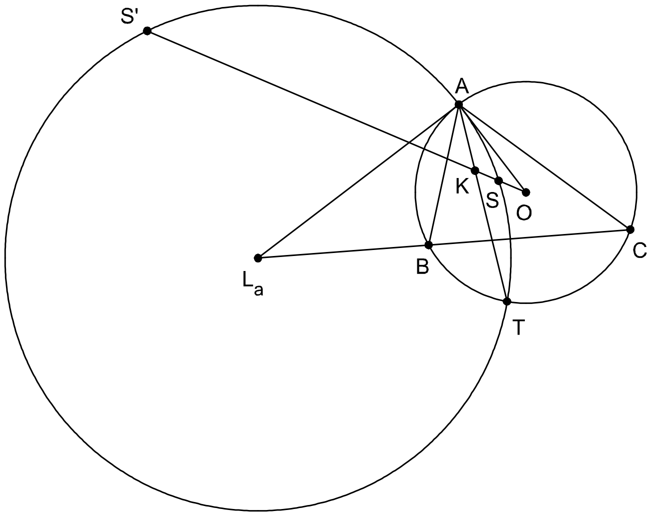


Figura 1.82: Puncte izodinamice

**Teorema 350** *Distanţele de la un centru izodinamic la vârfurile triunghiului sunt invers proporţionale cu lungimile laturilor opuse.*

**Demonstraţie.** Vezi definiţia punctului izodinamic. □

**Teorema 351** *Centrele izodinamice $S$ şi $S'$ ale unui triunghi neechilateral sunt puncte inverse faţă de cercul circumscris triunghiului.*

**Demonstraţie.** Deoarece cercul circumscris triunghiului $ABC$ este ortogonal cercurilor lui Apollonius rezultă că puterea lui $O$ (centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$) faţă de aceste cercuri este egală cu raza cercului circumscris, deci $OS{\cdot}OS'^2 = R^2$, ceea ce arată că punctele $S$ şi $S'$ sunt inverse faţă de cercul circumscris triunghiului $ABC$. □

[25] Albert Einstein (1879-1955) – fizician german, profesor universitar la Berlin şi Princeton, laureat al Premiului Nobel

**Observaţia 352** *O mulţime formată din patru puncte, având proprietatea că fiecare dintre ele este centru izodinamic al triunghiului determinat de celelalte trei puncte se numeşte* ***patrupunct izodinamic****.*

**Teorema 353** *Dacă $S$ este un punct izodinamic al triunghiului $ABC$, atunci mulţimea $\{A, B, C, S\}$ este un patrupunct izodinamic.*

**Demonstraţie.** Din simetria relaţiei $BC \cdot SA = CA \cdot SB = AB \cdot SC$ rezultă concluzia. □

**Teorema 354** *Triunghiurile podare ale punctelor izodinamice sunt triunghiuri echilaterale.*

**Demonstraţie.** Fie $S_aS_bS_c$ triunghiul podar al punctului izodinamic $S$ în raport cu triunghiul $ABC$ (Figura 1.83). Din teorema sinusurilor în triunghiul $AS_bS_c$ avem:

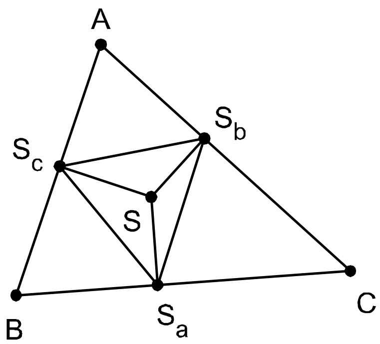


Figura 1.83: $S_aS_bS_c$ triunghiul podar al punctului izodinamic $S$

$AS = \frac{S_cS_b}{\sin A}$, de unde

$$S_cS_b = AS \cdot \frac{a}{2R} = \frac{a \cdot AS}{2R}.$$

Analog, $S_aS_b = \frac{c \cdot CS}{2R}$ şi $S_aS_c = \frac{b \cdot BS}{2R}$ relaţii care împreună cu $a \cdot SA = b \cdot SB = c \cdot SC$ dau: $S_aS_b \equiv S_bS_c \equiv S_cS_a$, adică $S_aS_bS_c$ este triunghi echilateral. □

**Teorema 355** *Punctele izodinamice ale triunghiului $ABC$ neechilateral sunt punctele de intersecţie dintre dreapta $OK$ şi cercurile lui Apollonius.*

**Demonstraţie.** Cum $OK$ este axa radicală a cercurilor lui Apollonius, fie că punctul $K$ aparţine interiorului cercului lui Apollonius corespunzător vârfului $A$ al triunghiului $ABC$, atunci dreapta $OK$ intersectează acest cerc în punctele distincte $S$ şi $S'$, puncte care se află pe cercurile lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor $B$, respectiv $C$. Deoarece $S$ şi $S'$ aparţin tuturor cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului $ABC$ rezultă că $a \cdot SA = b \cdot SB = c \cdot SC$, respectiv $a \cdot S'A = b \cdot S'B = c \cdot S'C$, adică punctele $S$ şi $S'$ sunt punctele izodinamice ale triunghiului $ABC$. □

**Observaţia 356** *Punctul $S$ - interior triunghiului $ABC$- se numeşte* ***punctul izodinamic interior*** *al triunghiului $ABC$, iar $S'$* ***punctul izodinamic exterior*** *al triunghiului $ABC$.*

i) Dacă triunghiul $ABC$ este echilateral atunci $a = b = c$ şi atunci punctul $S^{'}$ este "aruncat la infinit".

ii) Punctele izodinamice $S$ şi $S'$ ale unui triunghi neechilateral pot fi determinate de dreapta $OK$ prin relaţiile: $\rho(O) = OS \cdot OS'^2$ şi $\rho(K) = KS \cdot KS' = KA \cdot KT$, unde $\{T\} = AK \cap C(O, R)$.

iii) Punctele izodinamice aparţin ***axei Brocard*** $OK$.

**Teorema 357** *Simetricele punctului izodinamic $S$ faţă de laturile triunghiului $ABC$ determină un triunghi echilateral omologic cu triunghiul $ABC$.*

**Demonstraţie.** Fie $S_aS_bS_c$ triunghiul podar al punctului izodinamic $S$ în raport cu triunghiul $ABC$ şi $S_a^{'}, S_b^{'}, S_c^{'}$ simetricele punctului $S$ faţă de laturile $BC$, $CA$, respectiv $AB$ (Figura 1.84). Deoarece triunghiul $S_aS_bS_c$ este echilateral (cf. th. 354),

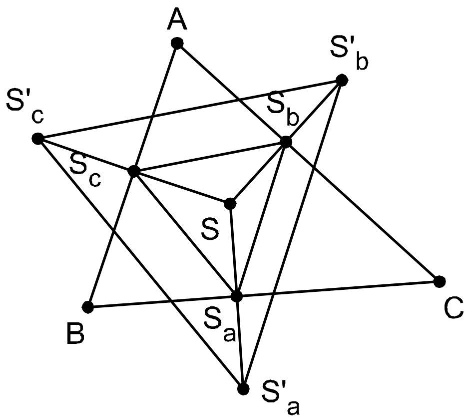


Figura 1.84: Simetricele punctului izodinamic $S$ faţă de laturi

iar triunghiurile $S_aS_bS_c$ şi $S_a^{'}S_b^{'}S_c^{'}$ sunt omotetice – prin omotetia de centru $S$ şi raport 2 – rezultă că triunghiul $S_a^{'}S_b^{'}S_c^{'}$ este echilateral. □

**Teorema 358** *Punctele izodinamice $S$ şi $S'$ ale unui triunghi neechilateral $ABC$ simetrice faţă de dreapta lui Lemoine a triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Deoarece $OK$ este axă radicală a cercurilor lui Apollonius rezultă că dreapta $OK$ este perpendiculară pe dreapta centrelor – adică pe dreapta lui Lemoine a triunghiului $ABC$ - deci $SS'$ este perpendiculară pe dreapta lui Lemoine, ceea ce arată că punctele izodinamice $S$ şi $S'$ sunt simetrice faţă de dreapta lui Lemoine a triunghiului $ABC$. □

**Teorema 359** *Punctele izodinamice şi izologice ale unui triunghi neechilateral ascuţitunghic sunt conciclice.*

**Demonstraţie.** Vezi „Puncte izologice". □

**Teorema 360** *Coordonatele unghiulare ale punctului izodinamic $S$ sunt:* $m(\sphericalangle A)+60°$, $m(\sphericalangle B)+60°, m(\sphericalangle C)+60°$.

**Demonstraţie.** Coordonatele unghiulare ale lui $S$ sunt date de măsurile unghiu - rilor $\sphericalangle ASB, \sphericalangle BSC$, respectiv $\sphericalangle CSA$ (Figura 1.84). Vom demonstra că $m(\sphericalangle ASB) = m(\sphericalangle ACB)+60°$. După cum am arătat triunghiul podar al lui $S$ este un triunghi echilateral (fie $S_aS_bS_c$ acest triunghi). Avem $m(\sphericalangle ASB) = 180° - m(\sphericalangle SAB) - m(\sphericalangle SBA)$. Dar

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle ACB) &= 180° - m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle B) \\ &= 180° - [m(\sphericalangle SAB) + m(\sphericalangle SAC)] - [m(\sphericalangle SBA) - m(\sphericalangle SBC)] \\ &= m(\sphericalangle ASB) - m(\sphericalangle SAC) - m(SBC) \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

Deoarece patrulaterele $SS_aBS_c$ şi $SS_bAS_c$ sunt inscriptibile rezultă $\sphericalangle SAS_b \equiv \sphericalangle SS_cS_b$ şi $\sphericalangle SBS_a \equiv \sphericalangle SS_cS_a$, relaţia (i) devenind:

$$m(\sphericalangle ASB) = m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle SS_cS_b) + m(\sphericalangle SS_cS_a) = m(\sphericalangle C) + 60°.$$

Analog, se arată că $m(\sphericalangle BSC) = m(\sphericalangle A) + 60°$ şi $m(\sphericalangle CSA) = m(\sphericalangle B) + 60°$. □

**Observaţia 361** *Analog se determină coordonatele unghiulare ale celui de-al doilea punct izodinamic $S'$:* $m(\sphericalangle A) - 60°, m(\sphericalangle B) - 60°, m(\sphericalangle C) - 60°$, *ţinând cont de faptul că dacă aceste unghiuri sunt negative sau mai mari decât* $180°$ *se vor considera complementele lor.*

**Teorema 362** *Punctele izodinamice $S$ şi $S'$ sunt punctele izogonale punctelor $F_1$ şi $F_2$ ale lui Fermat.*

**Demonstraţie.** Dacă punctele izogonale $M$ şi $M'$ au coordonatele unghiulare $(\lambda, \mu, \nu)$, respectiv $(\lambda', \mu', \nu')$, atunci

$$\lambda + \lambda' = 180° + m(\sphericalangle C), \mu + \mu' = 180° + m(\sphericalangle A), \nu + \nu' = 180° + m(\sphericalangle B)$$

(vezi „Drepte izogonale"). Fie $S^*$ izogonalul conjugat al primului punct izodinamic $S$. Atunci, $m(\sphericalangle BSC) + m(\sphericalangle BS^*C) = m(\sphericalangle A) + 180°$, de unde rezultă că

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BS^*C) &= 180° + m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle BSC) \\ &= 180° + m(\sphericalangle A) - [m(\sphericalangle A) + 60°] \\ &= 120°. \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\sphericalangle AS^*C) = 120°$ şi $m(\sphericalangle AS^*B) = 120°$, deci punctul $S^*$ coincide cu primul punct al lui Fermat. Analog se arată că izogonalul celui de-al doilea punct izodinamic este al doilea punct al lui Fermat. □

**Teorema 363** *Triunghiul podar $S_aS_bS_c$ al primului punct izodinamic $S$ al triunghiului $ABC$ este omotetic cu triunghiul exterior al lui Napoleon $N_aN_bN_c$.*

**Demonstraţie.** Punctele $S$ şi $F_1$ sunt izogonale (cf. th. 362). Triunghiul antipodar $A''B''C''$ al punctului $F_1$ este omotetic cu triunghiul $N_aN_bN_c$.; cum triunghiul podar al unui punct este omotetic cu triunghiul antipodar al izogonalului său rezultă că triunghiurile $S_aS_bS_c$ şi $A''B''C''$ sunt omotetice. Deoarece relaţia de omotetie este tranzitivă rezultă că triunghiurile $N_aN_bN_c$ şi $S_aS_bS_c$ sunt omotetice. □

**Teorema 364** *Triunghiul podar al celui de al doilea punct izodinamic $S$ al triunghiului $ABC$ este omotetic cu triunghiul interior al lui Napoleon.*

**Demonstraţie.** Soluţie analoagă cu cea din teorema 363. □

**Teorema 365** *Punctele $S', K, S, O$ formează o diviziune armonică.*

**Demonstraţie. Lema 1.** *Fie $T$ punctul de intersecţie dintre tangenta în $A$ la cercul circumscris unui triunghi neisoscel $ABC$ şi dreapta $BC$. Atunci,*

$$\frac{TB}{TC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

**Demonstraţie.** Avem $m(\sphericalangle TAB) = m(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB})$ şi

$$m(\sphericalangle TAC) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BCA) = 180^\circ - m(\sphericalangle ABC).$$

Din teorema sinusurilor (Figura 1.85) rezultă:

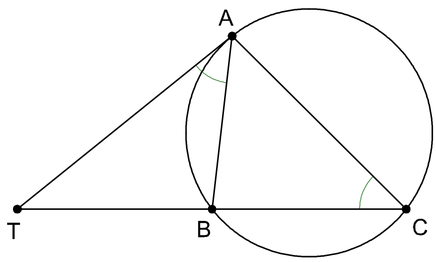


Figura 1.85: $\frac{TB}{TC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle TAB}{\sin \sphericalangle TAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$$

de unde $\frac{TB}{TC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

**Lema 2.** *Fie un cerc $\varsigma(O,R)$, punctele $A,B \in \varsigma$, $O \notin AB$, iar $T$ punctul de intersecţie al tangentelor în $A$ şi $B$ la $\varsigma$. O dreapta $d$ ce trece prin $T$ intersectează cercul $\varsigma$ în punctele $M$ şi $N$, $\{S\} = d \cap AB$. Atunci, $\frac{TM}{TN} = \frac{SM}{SN}$.*

**Demonstraţie.**Avem:

$$\frac{TM}{TN} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2 = \left(\frac{BM}{BN}\right)^2 \tag{i}$$

(Figura 1.86) (conform lemei precedente), de unde $AM \cdot BN = AN \cdot BM$. Din teorema

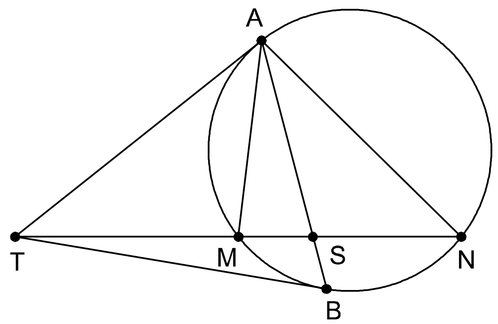


Figura 1.86: $S', K, S, O$ formează o diviziune armonică

sinusurilor rezultă

$$\frac{MB}{\sin \sphericalangle MAB} = \frac{BN}{\sin \sphericalangle BAN}$$

şi

$$\frac{MS}{SN} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{\sin \sphericalangle MAB}{\sin \sphericalangle BAN},$$

deci

$$\frac{SM}{SN} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{BM}{BN} = \left(\frac{MA}{NA}\right)^2 \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă

$$\frac{TM}{TN} = \frac{SM}{SN} = \left(\frac{MA}{NA}\right)^2 = \left(\frac{MB}{NB}\right)^2.$$

Punctele coliniare $T, M, S, N$ ce verifică relaţia $\frac{TM}{TN} = \frac{SM}{SN}$ spunem că formează o *diviziune armonică*.

**Demonstraţia *teoremei:*** Deoarece cercul circumscris triunghiului $ABC$ este ortogonal cercurilor lui Apollonius corespunzătoare triunghiului $ABC$, rezultă conform lemei 2 că $\frac{S'K}{S'O} = \frac{SK}{SO}$, adică punctele $S', K, S$ şi $O$ formează o diviziune armonică. $\square$