## 1.17 PUNCTUL IZOGON

„Geometria reprezintă eterna sclipire în mintea lui Dumnezeu. Împărtăşirea acesteia şi omului reprezintă motivul pentru care omul este imaginea lui Dumnezeu.” – Johannes Kepler[26]

**Teorema 366** *Să se găsească punctul $T$ din planul unui triunghi $ABC$ pentru care suma $TA+TB+TC$ este minimă.*

**Demonstraţie.** *Soluţia* 1. Prin rotaţia de centru $B$ şi unghi de $60°$ a triunghiului

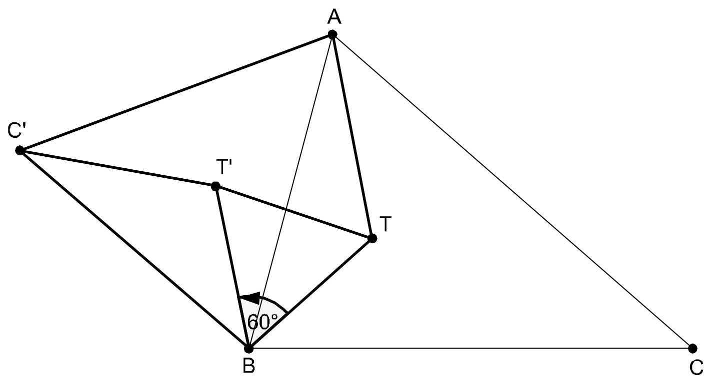


Figura 1.87: Punctul lui Toricelli - Fermat

$ABT$ se obţine triunghiul $C'BT'$ (Figura 1.87). Atunci, $TB = T'T$ şi $TA = C'T'$, de unde

$$TA + TB + TC = T'T + TC \geq C'C.$$

Suma este minimă atunci când punctul $T \in C'C$, adică $m(\sphericalangle BTC') = 60°$. Analog, prin rotaţia de centru $A$ şi unghi de $60°$ a triunghiului $ABT$ se obţine: $m(\sphericalangle ATC') = 60°$, deci $m(\sphericalangle ATB) = 120°$. Analog, se arată că punctul $T$ aparţine dreptelor $BB', AA'$ ($B'$şi $A'$ se obţine ca mai sus), deci punctul $T$ căutat se află la intersecţia dreptelor $AA', BB', CC'$.

*Soluţia* 2. Fie $T$ punctul pentru care suma $TA+TB+TC$ este minimă şi $d_a$ dreapta ce conţine punctele $T$ şi $A$. Arătăm că dacă, de exemplu, punctul $T$ se plimbă pe dreapta $d_a$ punctul căutat $T$ rămâne acelaşi. Fie că $A_1 \in AT$ şi presupunem că $T_1$ este punctul pentru care suma $T_1A_1 + T_1B + T_1C$ este minimă. Astfel, pentru triunghiul $ABC$ avem:

$$TA + TB + TC < T_1A + T_1B + T_1C$$

şi pentru:

$$T_1A + T_1B + T_1C < TA_1 + TB + TC$$

[26] Johannes Kepler (1571-1630) – matematician şi astronom german, considerat precursor al calculului integral

relaţii care sumate dau $TA + T_1A_1 < TA_1 + T_1A$ , sau

$$TA_1 + A_1A + T_1A_1 < TA_1 + T_1A,$$

de unde rezultă $A_1A + T_1A_1 < T_1A$, absurd. Deci, dacă $A \in d_a$, atunci poziţia punctului $T$ pentru care se realizează minimul nu se schimbă. Analog, se demonstrează proprietatea de mai sus şi pentru punctele $B$ şi $C$. Astfel, putem alege punctele $B \in d_b$ şi $C \in d_c$ astfel încât triunghiul $ABC$ să fie echilateral, acest lucru poate fi realizat. De exemplu, alegem $A \in d_a$ astfel încât $AB = BC$. Evident, dacă triunghiul $ABC$ este isoscel, punctul $T$ aparţine axei de simetrie a triunghiului $ABC$. Plimbăm acum punctul $B \in d_b$ (iar $T \in d_b$) astfel încât triunghiul $ABC$ devine echilateral şi atunci

$$m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°.$$

*Soluţia* 3. Fie $T$ un punct situat în interiorul triunghiului $ABC$ astfel încât

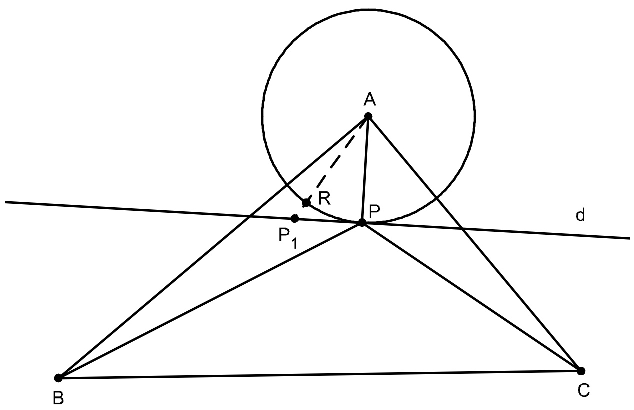


Figura 1.88: Punctul izogon

$m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC)$. Presupunem că lungimea segmentului $[TA]$ este constantă (Figura 1.88). Fie cercul cu centrul în $A$ şi rază $TA$ şi tangenta $d$ în $T$ la cerc. Fie $T_1 \in d, T_1 \neq T$, $AT_1 \cap \complement(A, TA) = \{R\}$. Cum $\sphericalangle ATB \equiv \sphericalangle ATC$ rezultă:

$$TB + TC < T_1B + T_1C < RB + RC$$

şi de aici

$$TA + TB + TC < TA + RB + RC = RA + RB + RC.$$

Repetând raţionamentul pentru $TB$ sau $TC$ constante rezultă că minimul se obţine pentru $\sphericalangle ATB \equiv \sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle BTC (= 120°)$.

**Observaţia 367** *Punctul $T$ pentru care se realizează minimul sumei $TA + TB + TC$ se numeşte* ***punct izogon*** *sau* ***punctul lui Toricelli-Fermat***[27] *al triunghiului ABC. Demonstraţia de mai sus nu mai este valabilă dacă un unghi al triunghiului ABC are măsura mai mare de* $120°$ *(vezi [12, § III.47]).*

[27] Pierre de Fermat (1601-1665) – matematician francez, contribuţii în teoria probabilităţilor şi teoria numerelor

**Teorema 368** *Într-un triunghi există cel mult un punct izogon.*

**Demonstraţie.** Presupunem prin absurd că triunghiul $ABC$ are două puncte

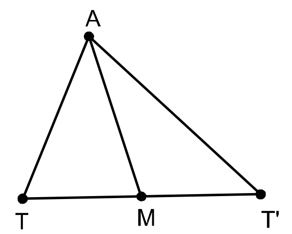


Figura 1.89: Punctul izogon

izogone $T \neq T'$ (Figura 1.89). Dacă $M$ este mijlocul segmentului $TT'$, atunci $MA < \frac{TA+T'A}{2}$, $MB < \frac{TB+T'B}{2}$, $MC < \frac{TC+T'C}{2}$, de unde rezultă:

$$MA + MB + MC < \frac{TA + TB + TC + T'A + T'B + T'C}{2} = TA + TB + TC,$$

ceea ce contrazice faptul că $T$ este punct izogon. □

**Teorema 369** *Dacă triunghiul ABC are un punct izogon, atunci acest punct se află în interiorul triunghiului ABC.*

**Demonstraţie.** Presupunem prin reducere la absurd că punctul izogon $T$ ar fi în

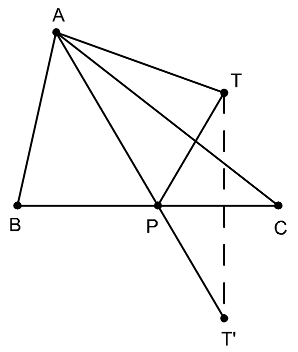


Figura 1.90: $T \in Int(\Delta ABC)$

exteriorul triunghiului $ABC$, fie că $T$ şi $A$ se află în semiplane diferite determinate de dreapta $BC$ şi $\{P\} = AT \cap BC$ (Figura 1.90). Fie $T'$ simetricul lui $T$ faţă de dreapta $BC$. Atunci, $AT' < AP + PT' = AP + PT = AT$. Totodată $BT = BT', CT = CT'$ ($BC$ fiind mediatoarea segmentului $TT'$). Astfel,

$$AT' + BT' + CT' < AT + BT + CT$$

relaţie ce este în contradicţie cu faptul că $T$ este punctul izogon al triunghiului $ABC$. □

**Teorema 370** *Coordonatele unghiulare ale centrului izogon sunt egale cu* $120°$.

**Demonstraţie.** Avem $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle BTC) = m(\sphericalangle CTA) = 120°$ (vezi [12, § II.11]). □

**Teorema 371** *Centrul izogon al unui triunghi echilateral este centrul cercului circumscris triunghiului.*

**Demonstraţie.** Deoarece $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle COA) = 120°$, unde $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. □

**Teorema 372** *Triunghiul antipodar al centrului izogon $T$ al unui triunghi este un triunghi echilateral.*

**Demonstraţie.** Fie $MNP$ triunghiul antipodar al punctului $T$ faţă de triunghiul

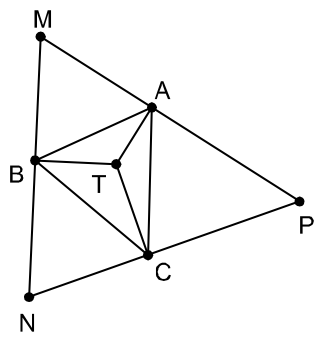


Figura 1.91: Triunghiul antipodar al centrului izogon $T$

$ABC$ (Figura 1.91). Din patrulaterul inscriptibil $TAMB$ rezultă $m(\sphericalangle BMA) = 180° - m(\sphericalangle BTA) = 180° - 120° = 60°$. Analog, $m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle MPN) = 60°$, ceea ce arată că triunghiul $MNP$ este echilateral. □

**Teorema 373** *Triunghiul podar al izogonalului centrului izogon $T$ al triunghiului $ABC$ relativ la triunghiul $ABC$, este un triunghi echilateral.*

**Demonstraţie.** Deoarece triunghiul podar al unui punct $P$ relativ la triunghiul $ABC$ este asemenea cu triunghiul antipodar al izogonalului său relativ la triunghiul $ABC$, atunci utilizând proprietatea precedentă rezultă concluzia. □

**Teorema 374** *Centrul izogon $T$ al triunghiului $ABC$ este izogonalul unuia dintre centrele izodinamice ale triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Deoarece singurele puncte din planul unui triunghi ale căror triunghiuri podare sunt echilaterale sunt centrele izodinamice ale triunghiului $ABC$ (vezi„Puncte izodinamice”), rezultă concluzia. □

**Teorema 375** *Fie $ABC$ un triunghi ale cărui unghiuri sunt fiecare mai mici decât $120°$, $T$ punctul izogon al triunghiului $ABC$ şi $A'B'C'$ triunghiul podar al lui $T$. Dacă cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ mai intersectează laturile $BC, CA$ şi $AB$ în $A'', B''$ respectiv $C''$, atunci triunghiul $A''B''C''$ este echilateral.*

**Demonstraţie.** Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ este cercul podar al punctului izogon $T$ în raport cu triunghiul $ABC$, deci $A''B''C''$ este triunghiul podar al punctului $S$ – izogonalul punctului $T$ (vezi „Drepte izogonale”) (Figura 1.92). Atunci,

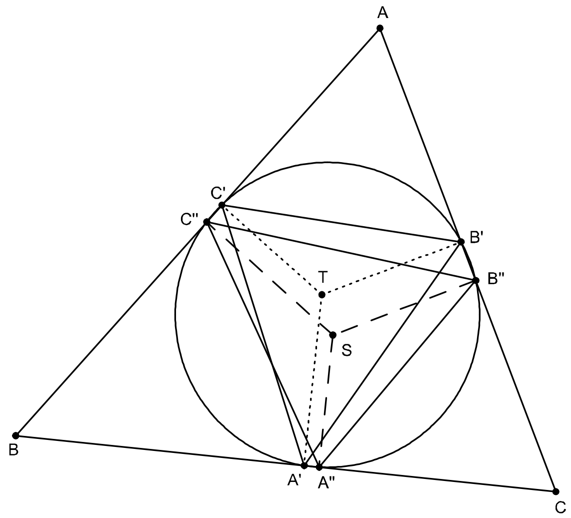


Figura 1.92: Cercul circumscris triunghiului podar al lui $T$

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B''A''C'') &= m(\sphericalangle SA''B'') + m(\sphericalangle SA''C'') = m(\sphericalangle SCB'') + m(\sphericalangle SBC'') \\ &= m(\sphericalangle A''CT) + m(\sphericalangle TBA'') = 180° - m(\sphericalangle BTC) = 60°. \end{aligned}$$

Analog, se arată că $m(\sphericalangle A''B''C'') = 60°$, adică triunghiul $A''B''C''$ este echilateral. □

**Teorema 376** *Într-un triunghi $ABC$, izogonalul punctului izogon $T$ este un punct $S$ pentru care $BC \cdot SA = CA \cdot SB = AB \cdot SC$.*

**Demonstraţie.** *Fie* $A''B''C''$ triunghiul podar al punctului $S$ (Figura 1.92). Conform proprietăţii precedente triunghiul $A''B''C''$ este echilateral. Din teorema sinusurilor în triunghiul $A''B''C''$ rezultă:

$$B''C'' = AS \cdot \sin A = AS \cdot \frac{BC}{2R}.$$

Analog, $C''A'' = BS \cdot \frac{AC}{2R}$, $A''B'' = CS \cdot \frac{AB}{2R}$. Deoarece $A''B'' = B''C'' = C''A''$ rezultă $B''C'' = AS \cdot \sin A = AS \cdot \frac{BC}{2R}$. □

**Observaţia 377** *Punctul* $S$ *cu proprietatea* $BC\cdot SA = CA\cdot SB = AB\cdot SC$ *se numeşte* ***punct izodinamic***.

**Teorema 378** *Triunghiul antipodar al centrului izogon* $T$ *este omotetic cu triunghiul podar al punctului izodinamic* $S$.

**Demonstraţie.** Fie $A''B''C''$ triunghiul podar al punctului $S$ în raport cu triunghiul $ABC$ şi $MNP$ triunghiul antipodar al punctului $T$ în raport cu triunghiul $ABC$. Patrulaterul $SB''AC''$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AB''C'' \equiv \sphericalangle ASC''$ şi cum $\sphericalangle SAC'' \equiv \sphericalangle TAB''$ rezultă

$$m(\sphericalangle AB''C'') + m(\sphericalangle TAB'') = m(\sphericalangle ASC'') + m(\sphericalangle SAC'') = 90^\circ,$$

adică dreptele $AT$ şi $B''C''$ sunt perpendiculare, de unde rezultă $C''B'' \parallel MP$. Analog se arată că $A''C'' \parallel MN$ şi $A''B'' \parallel NP$, deci triunghiurile $A''BC''$ şi $MNP$ sunt omotetice. $\square$

**Teorema 379** (***Generalizarea teoremei lui Toricelli - Fermat***) *Fie* $ABC$ *şi* $DEF$ *două triunghiuri de laturi* $a, b, c$, *respectiv* $d, e, f$. *În exteriorul triunghiului* $ABC$ *se construiesc triunghiurile* $A'BC, AB'C, ABC'$, *asemenea cu* $DEF$, $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) < 180^\circ$, $m(\widehat{B}) + m(\widehat{E}) < 180^\circ$, $m(\widehat{C}) + m(\widehat{F}) < 180^\circ$. *Atunci:*

*a)* $d\cdot AA' = e\cdot BB' = f\cdot CC'$;

*b) cercurile circumscrise triunghiurilor* $A'BC, AB'C$ *şi* $ABC'$ *au un punct comun* $T$;

*c) dreptele* $AA', BB'$ *şi* $CC'$ *sunt concurente în punctul* $T$;

d) $TA'\cdot d + TB'\cdot e + TC'\cdot f = 2(TA\cdot d + TB\cdot e + TC\cdot f)$;

*e) suma* $d\cdot MA + e\cdot MB + f\cdot MC$ *este minimă când* $M$ *coincide cu* $T$;

*f)* $2(d\cdot TA + e\cdot TB + f\cdot TC)^2 = a^2(-d^2+e^2+f^2) + b^2(d^2-e^2+f^2) + c^2(d^2+e^2-f^2) + 16\cdot S\cdot S'$, *unde* $S$ *şi* $S'$ *sunt ariile triunghiurilor* $ABC$, *respectiv* $DEF$;

*g) Dacă* $O_A, O_B, O_C$ *sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor* $A'BC, AB'C$, *respectiv* $ABC'$, *triunghiurile* $O_AO_BO_C$ *şi* $DEF$ *sunt asemenea.*

**Demonstraţie.** a) Din asemănarea triunghiurilor $A'BC$ şi $AB'C$ rezultă $\frac{CA'}{AC} = \frac{BC}{B'C}$ şi cum $\sphericalangle A'CA \equiv \sphericalangle BCB'$ rezultă că triunghiurile $A'CA$ şi $BCB'$ de unde

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{B'C} = \frac{DF}{EF} = \frac{e}{d},$$

adică $d\cdot AA' = e\cdot BB'$. Analog se arată că $e\cdot BB' = f\cdot CC'$ de unde rezultă $d\cdot AA' = e\cdot BB' = f\cdot CC'$ (Figura 1.93).

b) Fie $T$ al doilea punct de intersecţie dintre cercurile circumscrise triunghiurilor $BCA'$ şi $AB'C$. Atunci,

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BTC) &= 180^\circ - m(\sphericalangle BA'C) = 180^\circ - m(\sphericalangle D) \\ m(\sphericalangle ATC) &= 180^\circ - m(\sphericalangle CB'A) = 180^\circ - m(\sphericalangle E). \end{aligned}$$

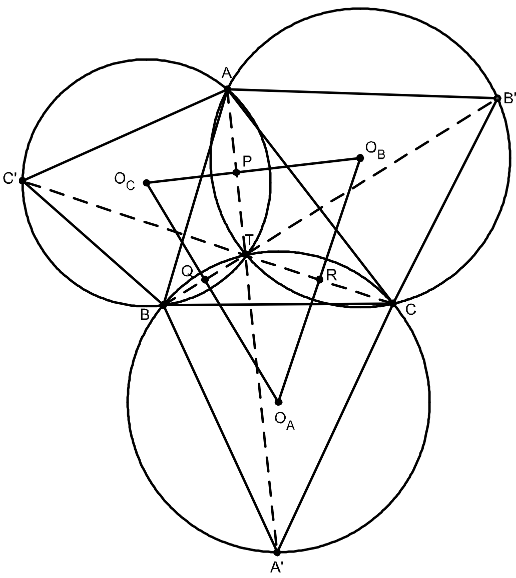


Figura 1.93: Generalizarea teoremei lui Toricelli - Fermat

Pentru că $m(\sphericalangle E)+m(\sphericalangle B) < 180°$, rezultă că $T$ aparţine arcelor cercurilor considerate aflate în interiorul triunghiului $ABC$. Atunci:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle ATB) &= 360° - m(\sphericalangle BTC) - m(\sphericalangle ATC) \\ &= 360° - (180° - m(\sphericalangle D)) - (180° - m(\sphericalangle E)) \\ &= 180° - m(\sphericalangle F) = 180° - m(\sphericalangle AC'B), \end{aligned}$$

adică patrulaterul $TAC'B$ este inscriptibil, deci $T$ aparţine şi cercului circumscris triunghiului $ABC'$.

c) Deoarece patrulaterul $BTCA'$ este inscriptibil rezultă

$$\sphericalangle BTA' \equiv \sphericalangle BCA' \equiv \sphericalangle DFE \equiv \sphericalangle AC'B$$

şi cum $m(\sphericalangle AC'B)+m(\sphericalangle ATB) = 180°$, rezultă $m(\sphericalangle BTA')+m(\sphericalangle ATB) = 180°$, adică punctele $A, T$ şi $A'$ sunt coliniare. Analog se arată că punctele $B, T, B'$ şi respectiv $C, T, C'$ sunt coliniare, deci $\{T\} = AA' \cap BB' \cap CC'$.

d) Din teorema lui Ptolemeu pentru patrulaterul inscriptibil $TBA'C$ rezultă

$$TA' \cdot BC = TB \cdot A'C + TC \cdot A'B \tag{i}$$

Din asemănarea triunghiurilor $A'BC$ şi $DEF$ avem:

$$\frac{A'B}{DE} = \frac{A'C}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $TA' \cdot k \cdot d = TB \cdot e \cdot f + TC \cdot f \cdot k$, adică

$$TA' \cdot d = TB \cdot e + TC \cdot f.$$

Analog se arată că: $TB' \cdot e = TA \cdot d + TC \cdot f$ şi $TC' \cdot f = TA \cdot d + TB \cdot e$. Sumând ultimele trei egalităţi membru cu membru rezultă:

$$TA' \cdot d + TB' \cdot e + TC' \cdot f = 2(TA \cdot d + TB \cdot e + TC \cdot f).$$

e) Fie $M$ un punct arbitrar situat în planul triunghiului $ABC$. Atunci,

$$d \cdot AA' \leq d(AM + MA') = d \cdot AM + e \cdot BM + f \cdot CM$$

cu egalitate pentru $M \in \overset{\frown}{BTC} \cap AA'$, deci când $M$ coincide cu $T$.

f) Din subpunctul precedent $d \cdot AA' = d \cdot AM + e \cdot BM + f \cdot CM$. Determinăm pe $AA'$ din triunghiul $BAA'$ aplicând teorema cosinusului:

$$AA'^2 = BA^2 + BA'^2 - 2BA \cdot BA' \cos(B + E),$$

adică

$$d^2 \cdot AA'^2 = (dc)^2 + (d \cdot BA'^2 - 2(d \cdot BA) \cdot (d \cdot BA') \cdot [\cos B \cos E - \sin B \sin E]$$

sau

$$d^2 \cdot AA'^2 = d^2c^2 + a^2f^2 - 2d \cdot c \cdot a \cdot f \left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{d^2 + f^2 - e^2}{2df} - \sin B \cdot \sin E\right],$$

de unde

$$d^2 \cdot AA'^2 = d^2c^2 + a^2f^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(d^2 + f^2 - e^2)}{2} - 2(ac \sin B) \cdot (df \sin E),$$

deci:

$$2(d \cdot TA + e \cdot TB + f \cdot TC)^2 = a^2(-d^2 + e^2 + f^2) + b^2(d^2 - e^2 + f^2) + c^2(d^2 + e^2 - f^2) + 16 \cdot S \cdot S'.$$

g) Fie $\{P\} = AT \cap O_BO_C, \{Q\} = BT \cap O_AO_C, \{R\} = CT \cap O_AO_B$. Deoarece $O_AO_B \perp CT$ şi $O_AO_C \perp BT$ rezultă că patrulaterul $O_ARTQ$ este inscriptibil, deci

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle QO_AR) &= 180^\circ - m(\sphericalangle QTR) = 180^\circ - m(\sphericalangle BTC) \\ &= 180^\circ - [180^\circ - m(\sphericalangle BA'C)] = m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle D). \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\sphericalangle O_AO_BO_C) = m(\sphericalangle E)$ şi $m(\sphericalangle O_AO_CO_B) = m(\sphericalangle F)$, adică triunghiurile $O_AO_BO_C$ şi $DEF$ sunt asemenea. □

**Observaţia 380** *1) Dacă $\rho$ este raza cercului circumscris triunghiului $DEF$ atunci $O_BC = b \cdot \rho$ şi*

$$O_AO_B = \frac{\rho \cdot AA'}{e} = \frac{\rho \cdot d \cdot AA'}{d \cdot e} = \frac{\rho \cdot d \cdot AA' \cdot f}{4\rho S'} = \frac{d \cdot AA'}{4S'} \cdot f.$$

*Analog $O_BO_C = \frac{e \cdot BB'}{4S'} \cdot d$ şi $O_CO_A = \frac{f \cdot CC'}{4S'} \cdot e$, deci*

$$\frac{O_AO_B}{f} = \frac{O_BO_C}{d} = \frac{O_CO_A}{e} = \frac{d \cdot AA'}{4S'}(d \cdot AA' = e \cdot BB' = f \cdot CC').$$

*2) Dacă triunghiul $DEF$ este echilateral se obţine teorema lui Toricelli.*