1.18 PUNCTE IZOTOMICE

„Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematică a simţurilor şi matematica drept muzică a raţiunii? Muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica este vis, matematica este viaţă practică." – James Sylvester[28]

Teorema 381 (***Teorema lui Neuberg***) *Fie P un punct interior în triunghiul ABC şi $\{P_1\}=AP\cap BC$, $\{P_2\}=BP\cap AC$, $\{P_3\}=PC\cap AB$, iar Q_1,Q_2 şi Q_3 sunt simetricele punctelor P_1, P_2 şi P_3 faţă de mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Dreptele AQ_1, BQ_2 şi CQ_3 sunt concurente.*

Demonstraţie. Din teorema lui Ceva rezultă $\frac{BP_1}{P_1C}\cdot\frac{P_2C}{P_2A}\cdot\frac{P_3A}{P_3B}=1$ (i). Cum

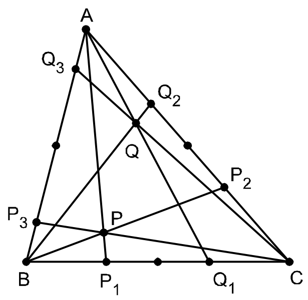

Figura 1.94: Teorema lui Neuberg

$BP_1=CQ_1$, $P_1C=BQ_1$, $P_2C=AQ_2$, $P_2A=CQ_2$, $P_3B=AQ_3$, relaţia (i) devine

$$\frac{CQ_1}{BQ_1}\cdot\frac{AQ_2}{CQ_2}\cdot\frac{BQ_3}{AQ_3}=1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AQ_1, BQ_2 şi CQ_3 sunt concurente într-un punct Q (Figura 1.94). □

Observaţia 382 *Punctele P şi Q se numesc* ***izotomic conjugate.*** *Dreptele AP_1 şi AQ_1 ($P_1, Q_1\in(BC)$) se numesc* ***drepte izotomice*** *dacă punctele P_1 şi Q_1 sunt simetrice faţă de mijlocul laturii BC.*

Teorema 383 *Retrocentrul unui triunghi este punctul izotomic al ortocentrului triunghiului.*

Demonstraţie. Vezi „Retrocentrul unui triunghi". □

Teorema 384 *Punctele Gergonne şi Nagel ale unui triunghi sunt izotomic conjugate.*

[28] James Sylvester (1814-1897) – matematician englez, profesor universitar la Oxford, contribuţii importante în algebră

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Gergonne”. □

Teorema 385 *Punctul lui Lemoine şi centrul cercului circumscris unui triunghi ABC sunt puncte izotomice în raport cu triunghiul median al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Lemoine”. □

Teorema 386 *În orice triunghi izogonalele izotomicelor a trei puncte coliniare sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izogonale”. □

Teorema 387 *Într-un triunghi izotomicele izogonalelor a trei puncte coliniare sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izogonale”. □

Teorema 388 *Într-un triunghi ascuţitunghic izotomicele ortocentrului (H), punctului lui Lemoine (K) şi centrului cercului circumscris (O) sunt coliniare.*

Demonstraţie. Deoarece O, G, H sunt punctele izogonale ale lui H, K, respectiv O – conform proprietăţii precedente - rezultă că izotomicele punctelor H, K, O sunt coliniare. □

Teorema 389 *Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$ şi $Q(\alpha', \beta', \gamma')$ două puncte izotomice în raport cu un triunghi ABC, exprimate în coordonate baricentrice. Atunci, $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$.*

Demonstraţie. Fie $\{P_1\} = AP \cap BC$, $\{P_2\} = BP \cap AC$, $\{P_3\} = PC \cap AB$, $\{Q_1\} = AQ \cap BC$, $\{Q_2\} = BQ \cap AC$ şi $\{Q_3\} = QC \cap AB$ (Figura 1.94). Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1B} &= -\frac{\gamma}{\beta}\overrightarrow{P_1C},\ \overrightarrow{P_2C} = -\frac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{P_2A},\ \overrightarrow{P_3A} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{P_3B},\\ \overrightarrow{Q_1B} &= -\frac{\gamma'}{\beta'}\overrightarrow{Q_1C},\ \overrightarrow{Q_2C} = -\frac{\alpha'}{\gamma'}\overrightarrow{Q_2A},\ \overrightarrow{Q_3A} = -\frac{\beta'}{\alpha'}\overrightarrow{Q_3B}.\end{aligned}$$

Deoarece $BP_1 \equiv CQ_1$ şi $CP_1 \equiv BQ_1$ rezultă $\overrightarrow{P_1B} \equiv \overrightarrow{CQ_1}$ şi $\overrightarrow{P_1C} \equiv \overrightarrow{BQ_1}$, deci

$$\overrightarrow{P_1B} \cdot \overrightarrow{Q_1B} = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot \left(-\frac{\gamma'}{\beta'}\right) \cdot \overrightarrow{P_1C} \cdot \overrightarrow{Q_1C},$$

de unde $\beta\beta' = \gamma\gamma'$. Analog, $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$. □

Teorema 390 *Dacă punctele P şi Q sunt izotomice şi coordonatele baricentrice ale lui P sunt (α, β, γ), atunci coordonatele baricentrice ale lui Q sunt $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$.*

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Teorema 391 *Fie P un punct din planul triunghiului ABC şi Q simetricul lui P faţă de centrul de greutate (G) al triunghiului ABC. Dacă P' şi Q'sunt izotomicele punctelor P şi Q, atunci $PQ \parallel P'Q'$.*

Demonstraţie. Fie (α, β, γ) coordonatele baricentrice ale punctului P; cum $G(1,1,1)$ rezultă coordonatele baricentrice ale punctului Q sunt $(2-\alpha, 2-\beta, 2-\gamma)$. Atunci, $P'\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ şi $Q'\left(\frac{1}{2-\alpha}, \frac{1}{2-\beta}, \frac{1}{2-\gamma}\right)$. Ecuaţiile dreptelor PQ şi $P'Q'$ sunt:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 2-\alpha & 2-\beta & 2-\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

respectiv

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{2-\alpha} & \frac{1}{2-\beta} & \frac{1}{2-\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

relaţii echivalente cu

$$(PQ) : x(\beta-\gamma) + y(\gamma-\alpha) + z(\alpha-\beta) = 0$$

şi

$$(P'Q') : \frac{x(\beta-\gamma)}{\beta\gamma(2-\beta)(2-\gamma)} + \frac{y(\gamma-\alpha)}{\gamma\alpha(2-\alpha)(2-\gamma)} + \frac{z(\alpha-\beta)}{\alpha\beta(2-\alpha)(2-\beta)} = 0.$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma(2-\gamma)(2-\beta)} & \frac{\gamma-\alpha}{\gamma\alpha(2-\gamma)(2-\alpha)} & \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(2-\alpha)(2-\beta)} \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că $PQ \parallel P'Q'$. □

Teorema 392 *Ceviana izotomică unei ceviene de rangul k este ceviana de rang $(-k)$.*

Demonstraţie. Fie AD o ceviană de ordinul k şi AE izotomica sa, $(D, E \in BC)$. Atunci,

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k, \frac{BE}{EC} = \frac{DC}{BD} = \left(\frac{b}{c}\right)^k = \left(\frac{c}{b}\right)^{-k}.$$

□

Teorema 393 *Fie AD o ceviană de ordinul k şi AE izotomica sa, $(D, E \in BC)$. Atunci, izogonala dreptei AE este o ceviană de rang $(k+2)$.*

Demonstraţie. Ceviana izotomică a unei ceviene de rang k este ceviana de rang $(-k)$, conform proprietăţii precedente. Izogonala cevienei de rang $(-k)$ este ceviana de rang $2-(-k) = 2+k$ (vezi „Drepte izogonale”). □

Teorema 394 *Fie M, N, P proiecţiile unui punct T pe laturile triunghiului ABC. Simetricul punctului T faţă de centrul cercului circumscris triunghiului ABC se proiectează pe laturile triunghiului în punctele M', N', P'. Punctele M', N', P' sunt izotomicele punctelor M, N, respectiv P.*

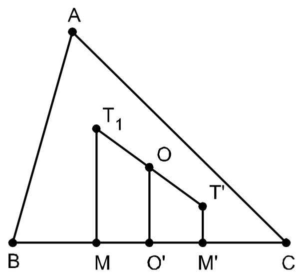

Figura 1.95: Puncte izotomice

Demonstraţie. În trapezul dreptunghic $MTT'M'$ perpendiculara din O pe latura MM' trece prin mijlocul segmentului MM', deci mediatoarea laturii BC este şi mediatoarea segmentului MM', adică punctele M şi M' sunt izotomice. Analog se arată şi pentru celelalte puncte (Figura 1.95). □

Teorema 395 *Punctele Gergonne şi Nagel sunt izotomic conjugate.*

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC atunci $\{\Gamma\} = AC_a \cap BC_b \cap CC_c$ şi N_1, N_2, N_3 punctele de contact ale cercurilor A-exînscris, B-exînscris, C-exînscris cu laturile BC, CA, respectiv AB, deci $\{N\} = AN_1 \cap BN_2 \cap CN_3$. Deoarece $BC_a = CN_1 = p - b$, $CC_b = AN_2 = p - c$ şi $AC_b = BN_3 = p - a$ rezultă că punctele Gergonne (Γ) şi Nagel (N) sunt izotomic conjugate. □

Teorema 396 *Fie M, N, P puncte pe laturile BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC, astfel încât perpendicularele în M, N, P pe laturile triunghiului sunt concurente. Dacă M', N', P' sunt izotomicele punctelor M, N, P, atunci şi perpendicularele în punctele M', N', P' pe laturile triunghiului sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie T punctul de concurenţă al perpendicularelor duse în M, N, P pe laturile triunghiului şi notăm $BM = a_1$, $MC = a_2$, $CN = b_1$, $NA = b_2$, $AP = c_1$, $PB = c_2$ (Figura 1.96). Din teorema lui Carnot rezultă

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2. \tag{i}$$

Cum $BM' = a_2$, $CM' = a_1$, $CN' = b_2$, $AN' = b_1$, $AP' = c_2$, $BP' = c_1$, atunci relaţia (i) este adevărată şi pentru punctele M', N', P', adică perpendicularele duse din aceste puncte pe laturile triunghiului sunt concurente într-un punct T'. □

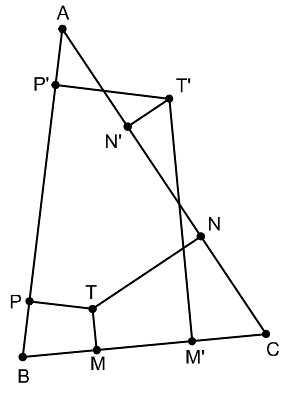

Figura 1.96: Perpendiculare concurente

Teorema 397 *Punctele T şi T' sunt simetrice faţă de centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Mediatoarea segmentului MM' este şi mediatoarea laturii BC (deoarece M şi M' sunt puncte izotomice). Din trapezele dreptunghice $MTT'M'$ şi $NTT'N'$ rezultă că mediatoarele laturilor BC şi AC se intersectează în mijlocul segmentului TT'. □

Teorema 398 *Ceviana izotomică unei ceviene de rangul k este ceviana de rang $(-k)$.*

Demonstraţie. Fie AD o ceviană de ordinul k şi AE izotomica sa, $(D, E \in BC)$. Atunci,

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k, \frac{BE}{EC} = \frac{DC}{BD} = \left(\frac{b}{c}\right)^k = \left(\frac{c}{b}\right)^{-k}.$$

□

Teorema 399 *Fie AD o ceviană de ordinul k şi AE izotomica sa, $(D, E \in BC)$. Atunci, izogonala dreptei AE este o ceviană de rang $(k+2)$.*

Demonstraţie. Ceviana izotomică a unei ceviene de rang k este ceviana de rang $(-k)$, conform proprietăţii precedente. Izogonala cevienei de rang $(-k)$ este ceviana de rang $2-(-k) = 2+k$ (vezi „Drepte izogonale"). □

Teorema 400 *Punctele lui Lemoine (K) şi al treilea punct Brocard $(\Omega")$ sunt izotomic conjugate.*

Demonstraţie. Vezi „Punctele lui Brocard". □

Teorema 401 *Dacă secanta DE a triunghiului ABC este paralelă cu latura BC, atunci dreapta obţinută unind punctele de intersecţie ale diagonalelor trapezului $ADEC$ cu două drepte izotomice AA' şi AA'' ale triunghiului, este la rândul ei paralelă cu BC.*

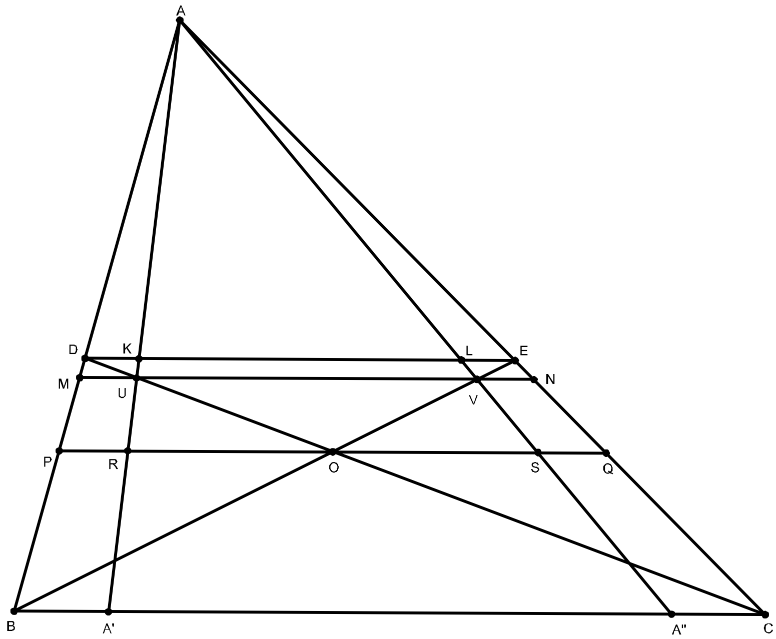

Figura 1.97: Drepte izotomice tăiate de o dreaptă

Demonstraţie. Notăm cu U şi V punctele de intersecţie ale diagonalelor CD şi BE ale trapezului cu dreptele AA' şi AA'' (Figura 1.97). Prin punctul O de intersecţie al diagonalelor trapezului, ducem paralela la latura BC, care intersectează laturile AB şi AC în P, respectiv Q. Dreapta UV intersectează laturile AB şi AC în M, respectiv N. Fie $\{R\} = PQ \cap AA'$, $\{K\} = DE \cap AA'$, $\{L\} = DE \cap AA''$, $\{S\} = PQ \cap AA''$. Deoarece triunghiurile OUR şi DUK, respectiv OVS şi EVL sunt asemenea, rezultă

$$\frac{OU}{UD} = \frac{OR}{DK} \text{ şi } \frac{OV}{VE} = \frac{OS}{EL};$$

cum punctul O aparţine medianei AO a triunghiului ABC avem $OR = OS$ şi $DK = EL$, de unde rezultă

$$\frac{OU}{UD} = \frac{OV}{VE},$$

adică $UV \parallel BC$. Reciproc, dacă prin punctul U al dreptei AA' ducem dreapta UV paralelă cu BC, iar $\{D\} = CU \cap AB, \{E\} = BV \cap AC$, atunci $DE \parallel BC$. Din asemănarea triunghiurilor PDO şi MDU, QEO şi NEV, rezultă

$$\frac{DO}{DU} = \frac{PO}{MU} \text{ şi } \frac{EO}{EV} = \frac{QO}{NV}.$$

Cum $PO = QO$ şi $MU = NV$ rezultă $\frac{DO}{DU} = \frac{EO}{EV}$, deci $DE \parallel UV \parallel BC$. □