1.19 PUNCTE IZOLOGICE

„Matematica va fi limba latină a viitorului, obligatorie pentru toţi oamenii de ştiinţă, tocmai pentru că matematica permite accelerarea maximă a circulaţiei ideilor ştiinţifice." - Grigore Moisil [29]

Punctele izologice ale unui triunghi sunt punctele de intersecţie dintre simetricele cercurilor lui Apollonius faţă de mediatoarele laturilor triunghiului.

Un punct U din planul unui triunghi ABC având laturile de lungimi a, b, c se numeşte izologic dacă:

$$\frac{UA}{a} = \frac{UB}{b} = \frac{UC}{c}.$$

Distanţele de la un punct izologic la vârfurile triunghiului sunt direct proporţionale cu lungimile laturilor opuse ale triunghiului.

Simetricul cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A al triunghiului ABC faţă de mediatoarea segmentului BC este un cerc Apollonius pentru segmentul BC şi conţine punctele P pentru care $\frac{PB}{b} = \frac{PC}{c}$.

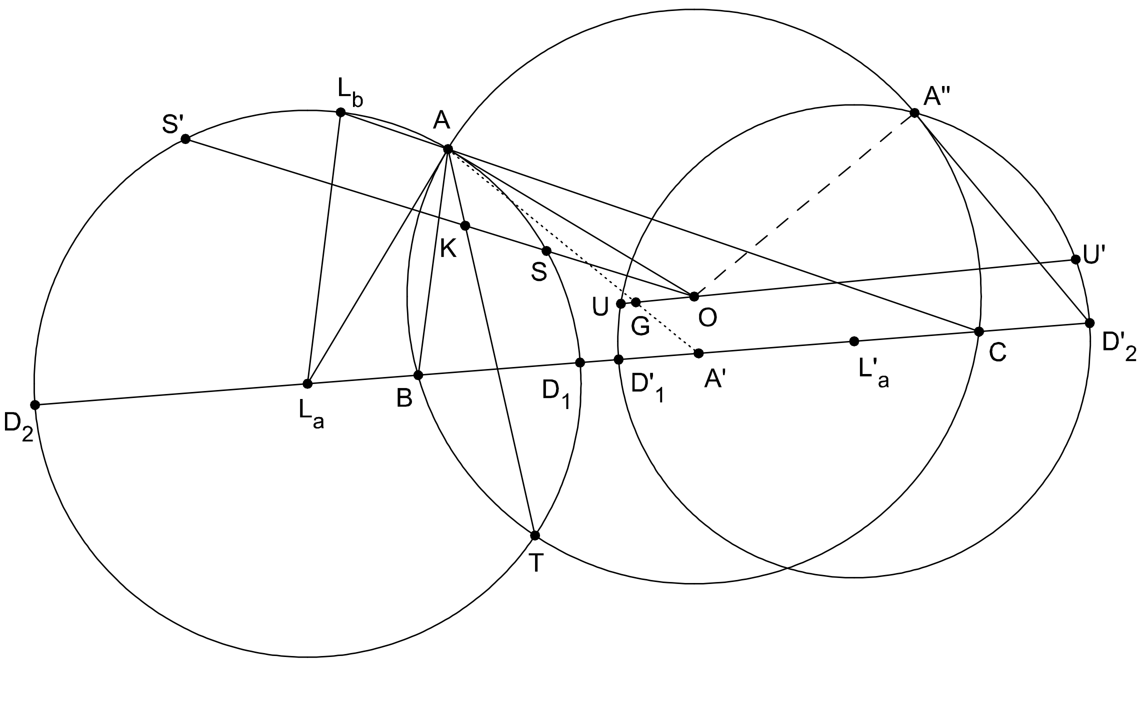

Figura 1.98: Puncte izologice

[29] Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iaşi, membru al Academiei Române, contribuţii importante în informatică

Teorema 402 *Fie $(C_A^{'})$ cercul lui Apollonius al punctelor P pentru care $\frac{PB}{b} = \frac{PC}{c}$ şi $L_a^{'}$ centrul acestui cerc. Centrul cercului $(C_A^{'})$ verifică relaţia:*

$$\frac{L_a^{'}C}{L_a^{'}B} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Demonstraţie. Fie $D_1^{'}$ şi $D_2^{'}$ punctele de intersecţie dintre dreapta BC şi cercul $(C_A^{'})$, iar A'' simetricul punctului A faţă de mediatoarea segmentului BC (evident $A'' \in C_A^{'}$). Atunci, dreapta $D_2^{'}A'' \perp OA''$, iar triunghiurile $D_2^{\prime}A''D_1^{\prime}$ şi CAB sunt congruente. Dacă L_a este cercul lui Apollonius corespunzător vârfului A, atunci $\frac{L_aB}{L_aC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ (vezi „Cercurile lui Apolonius"). Din motive de simetrie avem $L_aB = L_a^{'}C$ şi $L_aC = L_a^{'}B$, de unde rezultă $\frac{L_a^{'}C}{L_a^{'}B} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$. □

Observaţia 403 *Fie $(C_B^{'})$ cercul lui Apollonius al punctelor P pentru care $\frac{PA}{a} = \frac{PC}{c}$, respectiv $(C_C^{'})$ cercul lui Apollonius al punctelor P pentru care $\frac{PB}{b} = \frac{PA}{a}$ şi fie L_b, respectiv L_c centrele acestor două cercuri. Prin permutări circulare a relaţiei din proprietatea precedentă se obţin relaţiile $\frac{L_b^{'}A}{L_b^{'}C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$ şi $\frac{L_c^{'}B}{L_c^{'}A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$.*

Teorema 404 *Centrele cercurilor $C_A^{'}, C_B^{'}, C_C^{'}$ sunt coliniare.*

Demonstraţie. Avem $\frac{L_a^{'}C}{L_a^{'}B} \cdot \frac{L_b^{'}A}{L_b^{'}C} \cdot \frac{L_c^{'}B}{L_c^{'}A} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1$ şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele $L_a^{'}, L_b^{'}, L_c^{'}$ sunt coliniare. □

Observaţia 405 *Dreapta pe care se găsesc punctele $L_a^{'}, L_b^{'}, L_c^{'}$ se numeşte* ***dreapta lui Longchamps*** *a triunghiului ABC.*

Observaţia 406 *Deoarece punctul O (centrul cercului circumscris triunghiului ABC) are aceeaşi putere – egală cu R^2 - faţă de fiecare dintre cercurile $C_A^{'}, C_B^{'}, C_C^{'}$ rezultă că O aparţine axei lor radicale.*

Teorema 407 *Centrul de greutate G al triunghiului ABC este şi centrul de greutate al triunghiului $AL_aL_a^{'}$.*

Demonstraţie. Deoarece mijlocul segmentului BC este şi mijlocul segmentului $L_aL_a^{'}$, rezultă concluzia. □

Teorema 408 *Centrul de greutate G al triunghiului neechilateral ABC aparţine axei radicale dintre cercurile $(C_A^{'})$ şi $(C_B^{'})$.*

Demonstraţie. Puterea centrului de greutate G al triunghiului ABC faţă de cercul $(C_A^{'})$ este

$$\rho(G) = GP^2 = GL_a^{'2} - PL_a^{'2} = GL_a^{'2} - L_a^{'}D_1^{'2},$$

unde P este punctul de contact dintre tangenta dusă din G la cercul $(C_A^{'})$, deci $\rho(G) = GL_a^{'2} - L_aD_1^2$ (i). Fie A' mijlocul laturii BC, care coincide cu mijlocul segmentului

L_aL_a'. Atunci, $2R_A + 2D_1A' = L_aL_a'$ şi $\frac{a}{2} = BD_1 + D_1A'$, de unde $DA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$ (unde $BD_1 = \frac{ac}{b+c}$). Atunci

$$L_aL_a' = \frac{a(b^2+c^2)}{b^2-c^2} \tag{ii}$$

(am considerat fără a restrânge generalitatea că $b > c$). Relaţia lui Stewart aplicată în triunghiul AL_aA' ne dă

$$A'L_a \cdot \frac{2}{3}m_a + L_aA^2 \cdot \frac{1}{3}m_a - L_aG^2 \cdot m_a = \frac{1}{3}m_a \cdot \frac{2}{3}m_a \cdot m_a,$$

de unde

$$L_aG^2 = \frac{3(L_aA'^2 + L_aA^2) - 2m_a}{9}. \tag{iii}$$

Teorema medianei aplicată în triunghiul GL_aL_a' ne dă:

$$\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \frac{2(GL_a^2 + L_a'G^2) - L_a'L_a^2}{4}. \tag{iv}$$

Din relaţiile (i)-(iv) şi ţinând cont că $L_aD_1 = R_A = \frac{abc}{b^2-c^2}$, rezultă că $\rho(G) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (v). Datorită simetriei relaţiei (v) rezultă că punctul G aparţine axei radicale cercurilor C_A', C_B', C_C'. Cum O este punct pe această axă radicală rezultă că axa radicală a cercurilor C_A', C_B', C_C' este dreapta lui Euler OG a triunghiului ABC. □

Teorema 409 *Dacă un triunghi neechilateral ABC admite puncte izologice, atunci acestea aparţin dreptei lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 408. □

Teorema 410 *Punctele izologice U şi U' ale unui triunghi ABC neechilateral sunt punctele de intersecţie dintre dreapta lui Euler a triunghiului ABC şi – de exemplu – cercul (C_A').*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 408. □

Teorema 411 *Un triunghi obtuzunghic ABC nu are puncte izologice.*

Demonstraţie. Un punct oarecare U de pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC este bine determinat de numărul real λ pentru care $\overrightarrow{GU} = \lambda \cdot \overrightarrow{GO}$. Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul AGU rezultă:

$$AG^2 \cdot OU + AU^2 \cdot GO - AO^2 \cdot GU = GO \cdot OU \cdot GU,$$

adică $AU^2 = \lambda AO^2 + (1-\lambda)AG^2 - \lambda(1-\lambda)GO^2$. Din relaţia lui Leibnitz $OG^2 = R^2 - \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{9}$ rezultă:

$$9AU^2 = (9R^2 - 2k)\lambda^2 + (3a^2 - 2k)\lambda + (4k - 3a^2),$$

unde $k = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Punctul U va fi izologic dacă există un număr pozitiv t pentru care: $\frac{UA}{a} = \frac{UB}{b} = \frac{UC}{c} = t$, de unde rezultă: $9a^2t^2 = a^2(3\lambda - 3) + (9R^2 - 2k)\lambda^2 - 2k\lambda + 4k$ şi de aici:

$$\begin{cases} 3t^2 = \lambda - 1 \\ (9R^2 - 2k)\lambda^2 - 2k\lambda + 4k = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ecuaţia $(*)$ are rădăcini reale dacă şi numai dacă $\Delta = 36k(k - 4R^2) \geq 0$ $(**)$, adică $4R^2 \leq k = p^2 - r^2 - 4Rr$ sau $4R^2 + r^2 + 4Rr \leq p^2$, deci $(2R + r)^2 \leq p^2$, de unde $2R + r \leq p$, condiţie care nu este adevărată pentru triunghiurile obtuzunghice. □

Teorema 412 *Un triunghi dreptunghic are un singur punct izologic.*

Demonstraţie. Fie că $m(\sphericalangle BAC) = 90°$. Atunci $a^2 = b^2 + c^2$ şi $2R = a$. Astfel,

$$k = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$

şi din relaţia $(**)$ din problema precedentă rezultă $\Delta = 0$, adică triunghiul dreptunghic ABC are un singur punct izologic. □

Observaţia 413 *Din ecuaţia* $(9R^2 - 2k)\lambda^2 - 2k\lambda + 4k = 0$ *rezultă* $\lambda = 4$, *deci punctul izologic* U *este bine determinat de relaţia* $\overrightarrow{GU} = 4 \cdot \overrightarrow{GO}$.

Teorema 414 *Un triunghi neechilateral ascuţitunghic admite două puncte izologice* U *şi* U', *iar*

$$\frac{1}{GU} + \frac{1}{GU'} = \frac{1}{2GO}.$$

Demonstraţie. Deoarece într-un triunghi ascuţitunghic $2R + r < p$ rezultă că ecuaţia $(9R^2 - 2k)\lambda^2 - 2k\lambda + 4k = 0$ admite două rădăcini λ_1 şi λ_2, iar din relaţia $3t^2 = \lambda - 1$ rezultă că $\lambda = 1 + 3t^2$, adică rădăcinile ecuaţiei sunt supraunitare. Atunci, $GU = \lambda_1 GO$ şi $GU' = \lambda_2 GO$, relaţia de demonstrat devenind: $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$ echivalentă cu $2(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, adică $2 \cdot \frac{2k}{9R^2 - 2k} = \frac{4k}{9R^2 - 2k}$, relaţie evidentă. □

Teorema 415 *Punctele izologice şi izodinamice ale unui triunghi neechilateral ascuţitunghic sunt conciclice.*

Demonstraţie. Fie S şi S'punctele izodinamice, iar U şi U' punctele izologice ale triunghiului ABC de centru O. Atunci, $OS \cdot OS' = OU \cdot OU'^2$, deci

$$\frac{OS}{OU} = \frac{OU'}{OS'}$$

şi cum $\sphericalangle SOU \equiv \sphericalangle S'OU'$ rezultă că triunghiurile SOU şi $U'OS'$ sunt asemenea. Atunci, $m(\sphericalangle OSU) = m(\sphericalangle OU'S')$, deci patrulaterul $SUU'S'$ este inscriptibil. □

Teorema 416 *Dreptele* SU *şi* $S'U'$ *sunt antiparalele.*

Demonstraţie. Vezi teorema 415. □

Observaţia 417 *Dacă triunghiul* ABC *este echilateral atunci* $S \equiv U \equiv O$ *şi* S' *şi* U' *sunt „aruncate la infinit”.*