1.21 RETROCENTRUL UNUI TRIUNGHI

„Matematica este o formă de poezie care transcende poezia prin aceea că proclamă adevărul."
- Solomon Bochner[30]

Retrocentrul (R) al unui triunghi ABC este punctul izotomic al ortocentrului H al triunghiului ABC.

Teorema 422 *Retrocentrul unui triunghi ABC este punctul lui Lemoine al triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC, $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC şi $A''B''C''$ triunghiul ortic al triunghiului anticomplementar $A'B'C'$, $\{D\} = A'A'' \cap BC$ (Figura 1.100). Din congruenţa

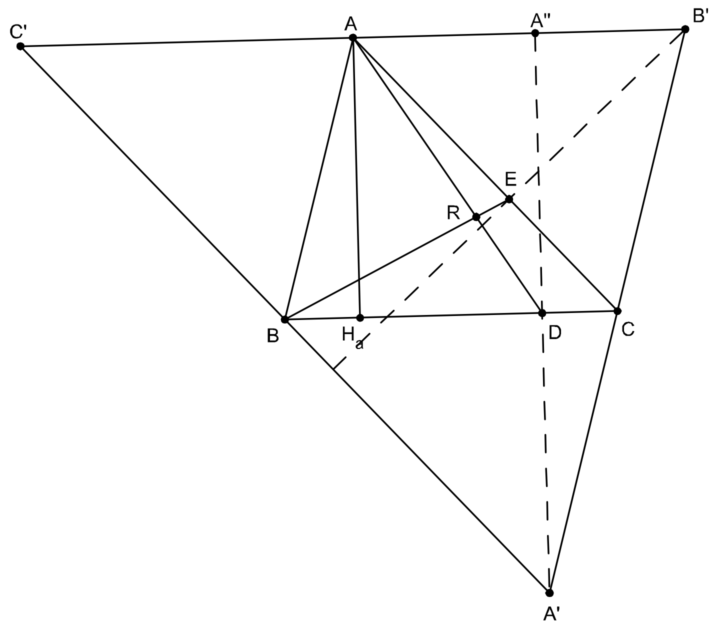

Figura 1.100: Retrocentrul unui triunghi

triunghiurilor dreptunghice BDA' şi AH_aC ($BA' \equiv AC, \sphericalangle DA'B \equiv \sphericalangle H_aAC$) rezultă $BD \equiv H_aC$, adică punctele H_a şi D sunt izotomice pe BC, deci retrocentrul R al triunghiului ABC aparţine dreptei AD. Cum BC este linie mijlocie în triunghiul anticomplementar, rezultă că D este mijlocul înălţimii $A'A''$, deci în triunghiul $A'B'C'$, AD este o dreaptă Schwatt. Analog se arată că retrocentrul (R) al triunghiului aparţine şi celorlalte drepte Schwatt şi deoarece dreptele Schwatt ale unui triunghi sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului, rezultă că retrocentrul triunghiului ABC coincide cu punctul lui Lemoine al triunghiului anticomplementar. □

[30] Solomon Bochner (1899-1982) – matematician polonez, profesor universitar la Princeton

Teorema 423 *Triunghiul pedal al retrocentului R al unui triunghi ABC este triunghiul podar al punctului lui Longchamps corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Punctul lui Longchamps al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului anticomplementar $A'B'C'$ al triunghiului ABC. Fie R_a, R_b, R_c punctele de intersecţie dintre înălţimile triunghiului anticomplementar cu laturile triunghiului ABC. Deoarece $BC \parallel B'C'$, rezultă $LR_a \perp BC$ şi analog, $LR_b \perp AC$ şi $LR_c \perp AB$, deci $R_aR_bR_c$ este triunghiul podar al punctului lui Longchamps. Din proprietatea precedentă rezultă că dreptele AR_a, BR_b şi CR_c se intersectează în retrocentrul triunghiului ABC, deci $R_aR_bR_c$ este triunghiul pedal al lui R. □

Teorema 424 *Coordonatele baricentrice ale retrocentului R al unui triunghi ABC sunt: $(ctgA, ctgB, ctgC)$.*

Demonstraţie. Coordonatele baricentrice relative ale ortocentrului H al triunghiului ABC sunt (tgA, tgB, tgC) şi cum retrocentrul R este punctul izotomic al ortocentrului triunghiului ABC rezultă că R are coordonatele baricentrice relative

$$\left(\frac{1}{tgA}, \frac{1}{tgB}, \frac{1}{tgC}\right),$$

adică $(ctgA, ctgB, ctgC)$. □

Teorema 425 *Punctul lui Gergonne, punctul lui Nagel şi retrocentrul triunghiului ABC sunt coliniare.*

Demonstraţie. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC şi p semiperimetrul său. Coordonatele baricentrice relative ale punctului lui Nagel sunt $N(p-a, p-b, p-c)$, iar ale izotomicului său – punctul lui Gergonne – sunt $\Gamma\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$. Condiţia de coliniaritate a punctelor Γ, N şi R este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ \frac{1}{p-a} & \frac{1}{p-b} & \frac{1}{p-c} \\ ctgA & ctgB & ctgC \end{vmatrix} = 0$$

(egalitate adevărată utilizând relaţiile $ctgA = \frac{b^2+c^2-a^2}{4A_{[ABC]}}$, $ctgB = \frac{c^2+a^2-b^2}{4A_{[ABC]}}$, $ctgC = \frac{a^2+b^2-c^2}{4A_{[ABC]}}$). □