1.22 PUNCTUL ANTI-STEINER

"Nous voyons expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acqulert une vigueur toute nouveile" - Blaise Pascal[31]

Teorema 426 (***Teorema lui Collings***) *Fie o dreaptă d ce conţine ortocentrul H al triunghiului ABC. Simetricele dreptei d faţă de laturile triunghiului ABC sunt concurente într-un punct de pe cercul circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Fie d_a, d_b, d_c simetricele dreptei d faţă de laturile BC, CA, respectiv AB, D_1, D_2, D_3 punctele de intersecţie dintre dreapta d şi laturile BC, CA, respectiv AB, A_h, B_h, C_h simetricele ortocentrului H faţă de laturile triunghiului (Figura 1.101). Notăm cu $\{\Sigma\} = d_a \cap d_b$, $\{E\} = d_b \cap BC$, $\alpha = m(\widehat{\Sigma D_1 C})$, $\beta = m(\widehat{B_h D_2 A})$ şi

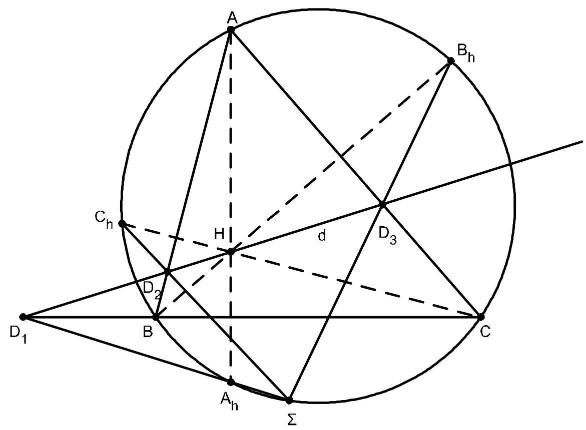

Figura 1.101: Teorema lui Collings

$\gamma = m(\widehat{A_h \Sigma B_h})$. Punctele A_h, B_h, C_h aparţin cercului circumscris triunghiului ABC (vezi „Ortocentrul unui triunghi"). Evident, punctele D_1, D_2, D_3 aparţin dreptelor BC, CA, respectiv AB. Avem,

$$m(\widehat{A_h A B_h}) = 2m(\widehat{CAB_h}) = 2[90^\circ - m(\widehat{HB_hA})] = 180^\circ - 2m(\widehat{ACB}) \qquad \text{(i)}$$

Deoarece unghiul $\widehat{D_1 D_2 B_h}$ este exterior triunghiului $D_1 D_2 \Sigma$, rezultă $\gamma + 2\alpha = 2\beta$ (triunghiurile HA_hD_1 şi HB_hD_2 fiind isoscele), deci

$$\gamma = 2(\beta - \alpha) = 2\{[180^\circ - m(\widehat{C}) - m(\widehat{D_2 E C})] - [180^\circ - \gamma - m(\widehat{D_1 E \Sigma})]\}$$

de unde $\gamma = 2\gamma - 2m(\widehat{C})$, deci $\gamma = 2m(\widehat{C})$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $m(\widehat{A_h A B_h}) + m(\widehat{A_h \Sigma B_h}) = 180^\circ$, deci punctul Σ aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Analog se arată că punctul Σ aparţine şi dreptei d_c, deci dreptele d_a, d_b, d_c se intersectează într-un punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC.

[31] Blaise Pascal (1623-1662) – matematician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

Observaţia 427 *Punctul de concurenţă al dreptelor d_a, d_b, d_c se numeşte* ***punctul anti-Steiner***[32] *corespunzător dreptei d. Orice dreaptă ce trece prin ortocentrul triunghiului ABC admite un punct anti-Steiner.*

Teorema 428 *Dreapta lui Steiner a punctului Σ este dreapta d.*

Demonstraţie. Soluţie imediată din definiţia dreptei lui Steiner. □

Teorema 429 *Punctul anti-Steiner al înălţimii din A a triunghiului ABC este vârful A.*

Demonstraţie. Deoarece simetricele înălţimii din A faţă de laturile triunghiului trec prin punctul A, demonstraţia este evidentă. □

Teorema 430 *Fie P un punct pe o dreaptă d ce trece prin ortocentrul H al unui triunghi ABC, iar P_1, P_2, P_3 simetricele punctului P faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Punctul anti-Steiner al dreptei d aparţine cercurilor circumscrise patrulaterelor $AP_2P_3, BP_3P_1, CP_1P_2$.*

Demonstraţie. Din teorema lui Collings rezultă că $m(\widehat{A_h\Sigma B_h}) = 2m(\widehat{C})$ (Figura 1.102). Avem:

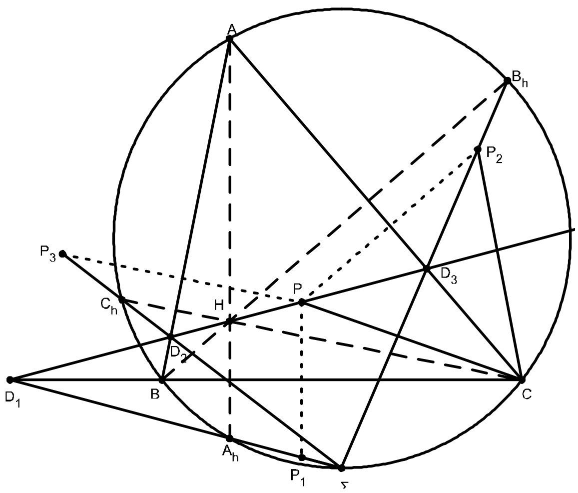

Figura 1.102: Punctul anti-Steiner

$$m(\widehat{P_2CP_1}) = m(\widehat{P_2CP}) + m(\widehat{P_1CP}) = 2[m(\widehat{PCA}) + m(\widehat{PCB})] = 2m(\widehat{C}),$$

de unde $m(\widehat{A_h\Sigma B_h}) = m(\widehat{P_2CP_1})$, adică patrulaterul $CP_1\Sigma P_2$ este inscriptibil, deci punctul Σ aparţine cercului circumscris triunghiului CP_1P_2. Analog, se arată că punctul Σ aparţine cercurilor circumscrise triunghiurilor AP_2P_3 şi BP_3P_1. □

[32] Denumirea a fost dată de matematicianul german Darij Grinberg