1.23 PUNCTUL PIVOT AL UNUI TRIUNGHI

„Matematica este partea exactă a cunoaşterii umane." - G. Moisil[33]

Teorema 431 (***Teorema lui Miquel***) *Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele necoliniare D, E, F ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE au un punct comun P.*

Demonstraţie. Fie P punctul comun cercurilor circumscrise triunghiurilor BDF

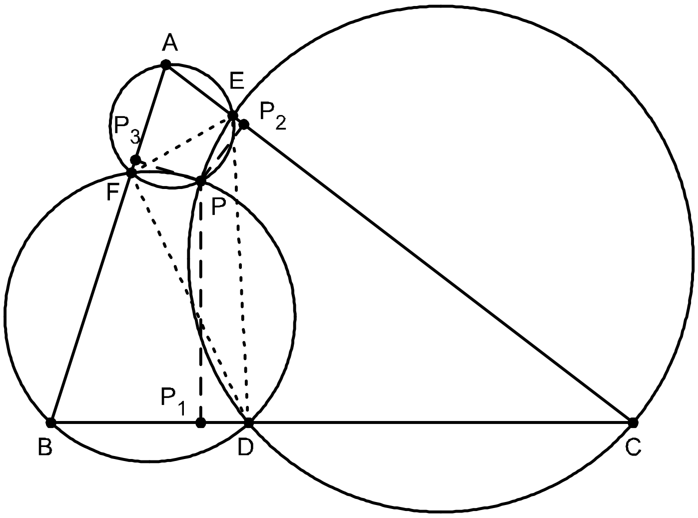

Figura 1.103: Teorema lui Miquel

şi DCE (Figura 1.103). Deoarece patrulaterele $FBDP$ şi $CEPD$ sunt inscriptibile rezultă:

$$\begin{aligned} m(\widehat{FPE}) &= 360^\circ - m(\widehat{FPD}) - m(\widehat{DPE}) \\ &= 360^\circ - [180^\circ - m(\widehat{B})] - [180^\circ - m(\widehat{C})] \\ &= 180^\circ - m(\widehat{A}), \end{aligned}$$

deci patrulaterul $FPEA$ este inscriptibil, adică punctul P aparţine cercului circumscris triunghiului AFE. □

[33] Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iaşi, membru al Academiei Române

Observaţia 432

1) Punctul P de concurenţă a celor 3 cercuri se numeşte ***punctul pivot*** al triunghiului DEF.

2) Triunghiul DEF se numeşte ***triunghiul lui Miquel .***

3) Cercurile circumscrise triunghiurilor AFE, BFD, CDE se numesc ***cercurile lui Miquel.***

4) Din teorema lui Miquel rezultă $m(\widehat{FPE}) = 180° - m(\widehat{A})$, $m(\widehat{FPD}) = 180° - m(\widehat{B})$, $m(\widehat{DPE}) = 180° - m(\widehat{C})$.

5) Fie P un punct şi $P_aP_bP_c$ triunghiul său cevian în raport cu triunghiul ABC. Cercurile circumscrise triunghiurilor AP_bP_c, BP_aP_c şi CP_aP_b se intersectează într-un punct M_P numit ***punctul pivot asociat*** lui P.

Teorema 433 *Coordonatele unghiulare ale punctului pivot P sunt: $m(\widehat{EDF})+m(\widehat{A})$, $m(\widehat{DEF}) + m(\widehat{B})$, respectiv $m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{C})$.*

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned} m(\widehat{BPC}) &= m(\widehat{BPD}) + m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BFD}) + m(\widehat{DEC}) \\ &= [180° - m(\widehat{BDF}) - m(\widehat{B})] + [180° - m(\widehat{EDC}) - m(\widehat{C})] \\ &= 360° - [m(\widehat{BDF}) + m(\widehat{EDC})] - [m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] \\ &= 360° - [180° - m(\widehat{EDF})] - [180° - m(\widehat{A})] \\ &= m(\widehat{EDF}) + m(\widehat{A}). \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\widehat{CPA}) = m(\widehat{FED}) + m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{C})$. □

Teorema 434 *În triunghiul ABC fie punctele $D, D' \in [BC]$, $E, E' \in [CA]$, $F, F' \in [AB]$. Dacă P şi P' sunt punctele pivot ale triunghiului DEF, respectiv $D'E'F'$ atunci punctele P şi P' coincid dacă şi numai dacă triunghiurile DEF şi $D'E'F'$ sunt asemenea.*

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned} m(\widehat{BPC}) &= m(\widehat{BPD}) + m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BFD}) + m(\widehat{DEC}) \\ &= [180° - m(\widehat{DFE}) - m(\widehat{EFA})] + [180° - m(\widehat{DEF}) - m(\widehat{FEA})] \\ &= m(\widehat{EDF}) + m(\widehat{BAC}). \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\widehat{CPA}) = m(\widehat{DEF})+m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{EFD})+m(\widehat{ACB})$. Dacă punctele P şi P' coincid, atunci $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BP'C})$, de unde

$$m(\widehat{EDF}) + m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{E'D'F'}) + m(\widehat{BAC}),$$

adică $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{E'D'F'})$ şi analoagele de unde rezultă că triunghiurile DEF şi $D'E'F'$ sunt asemenea. Dacă triunghiurile DEF şi $D'E'F'$ sunt asemenea atunci,

$$m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BP'C}),\ m(\widehat{APB}) = m(\widehat{AP'B}),\ m(\widehat{APC}) = m(\widehat{AP'C}),$$

deci P coincide cu P'. □

Teorema 435 *Triunghiul podar al punctului pivot P al triunghiului DEF este asemenea cu triunghiul DEF.*

Demonstraţie. Fie $P_1P_2P_3$ triunghiul podar al punctului pivot P (Figura 1.103). Deoarece patrulaterele AP_2PP_3, BP_1PP_3 şi CP_1PP_2 sunt inscriptibile rezultă că punctul pivot al triunghiului $P_1P_2P_3$ este tocmai punctul P şi conform teoremei precedente rezultă că triunghiurile $P_1P_2P_3$ şi DEF sunt asemenea. □

Teorema 436 *Centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC este punctul pivot asociat al centrului de greutate (G) al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Dacă $M_aM_bM_c$ este triunghiul median al triunghiului ABC, atunci patrulaterele AM_cOM_b, BM_aOM_c, M_aCM_bO sunt inscriptibile, deci O este punctul pivot asociat al lui G. □

Teorema 437 *Ortocentrul (H) al triunghiului ABC este punctul pivot asociat tot al lui H*

Demonstraţie. Dacă $H_aH_bH_c$ este triunghiul ortic al triunghiului ABC, atunci patrulaterele HH_bAH_c, H_cHH_aB, HH_bCH_a sunt inscriptibile, deci H este punctul pivot asociat al lui H. □

Teorema 438 *Centrul cercului înscris (I) în triunghiul ABC este punctul pivot asociat al punctului lui Gergonne (Γ) al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Dacă $C_aC_bC_c$ este triunghiul de contact al triunghiului ABC, atunci patrulaterele AC_cIC_b, BC_aIC_c, CC_bIC_a sunt inscriptibile, deci cercurile circumscrise triunghiurilor AC_cC_b, BC_aC_c şi CC_bC_a se interesectează în I şi cum $\{\Gamma\} = AC_a \cap BC_b \cap CC_c$ rezultă concluzia. □

Teorema 439 *Dreptele ce unesc punctul pivot (M) asociat unui punct P cu picioarele cevienelor lui P intersecteaza laturile triunghiului ABC sub acelaşi unghi.*

Demonstraţie. Fie $P_aP_bP_c$ triunghiul cevian al punctului P în raport cu triunghiul ABC. Deoarece patrulaterele MP_aCP_b, MP_bAP_c, MP_cBP_a sunt inscriptibile rezultă că

$$m(\widehat{MP_aC}) = m(\widehat{MP_bA}) = m(\widehat{MP_cB}).$$

□