1.24 PUNCTUL LUI BEVAN

„Unu şi cu unu nu fac doi,/Unu şi cu unu fac trei
sau patru, sau cinci.../Matematica s-o fi scriind cu cifre
dar pozia nu se scrie cu cuvinte.” - Nichita Stănescu

Fie I_a, I_b, I_c centrele cercurilor A, B, C- exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC şi $I_aI_bI_c$ triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC. Cercul circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ se numeşte ***cercul lui Bevan*** (Figura 1.104). Centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ se numeşte ***punctul lui Bevan*** (V).

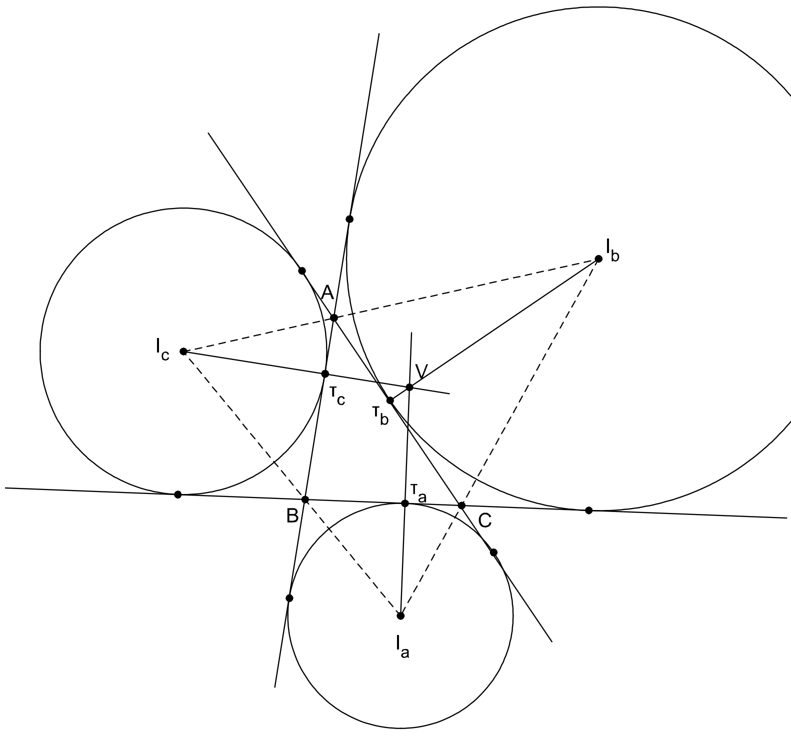

Figura 1.104: Punctul lui Bevan

Teorema 440 *Perpendicularele duse din punctele I_a, I_b, I_c pe laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC sunt concurente în punctul lui Bevan.*

Demonstraţie. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului exînscris (vezi “Cercurile exînscrise”). Deoarece perpendicularele duse din vârfurile unui triunghi XYZ pe laturile triunghiului ortic corespunzător sunt concurente în centrul cercului exînscris triunghiului XYZ, atunci perpendicularele duse din centrele cercurilor exînscrise I_a, I_b, I_c pe laturile BC, CA, respectiv AB sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$, adică în punctul lui Bevan. □

Teorema 441 *Triunghiul podar al punctului lui Bevan al triunghiului ABC este triunghiul cotangentic $\tau_a\tau_b\tau_c$ al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi teorema 440. □

Teorema 442 *Punctul lui Bevan este centrul de omologie între triunghiul cotangentic $\tau_a\tau_b\tau_c$ al triunghiului ABC şi triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Avem $I_a\tau_a \cap I_b\tau_b \cap I_c\tau_c = \{V\}$ şi conform teoremei lui Desargues rezultă că triunghiurile $\tau_a\tau_b\tau_c$ şi $I_aI_bI_c$ sunt omologice. □

Teorema 443 *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Punctele I, O şi V sunt coliniare.*

Demonstraţie. Punctul I este ortocentrul triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$, V

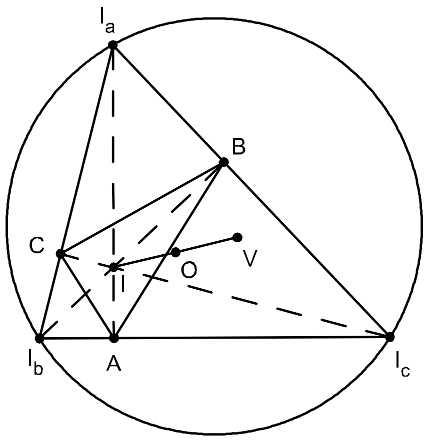

Figura 1.105: $I - O - V$

centrul cercului circumscris triunghiului, iar O este centrul cercului Euler al triunghiului $I_aI_bI_c$, deci punctele I, O şi V sunt coliniare, ele aparţinând dreptei lui Euler a triunghiului $I_aI_bI_c$ (Figura 1.105). □

Teorema 444 *Segmentele IO şi OV sunt congruente.*

Demonstraţie. Deoarece centrul cercului lui Euler este mijlocul segmentului determinat de ortocentru, respectiv centrul cercului circumscris unui triunghi, soluţia este evidentă. □

Teorema 445 *Punctul lui Bevan este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$ corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Centrul cercului înscris (I) în triunghiul ABC este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$. Punctul lui Bevan (V) al triunghiului ABC este simetricul lui I faţă de centrul cercului circumscris triunghiului ABC (centrul cercului lui Euler al triunghiului $I_aI_bI_c$), deci V este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$. □

Teorema 446 *Lungimea segmentului OV este egală cu $\sqrt{R^2-\frac{abc}{a+b+c}}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din relaţia lui Euler pentru triunghiul ABC avem:

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2-2Rr=R^2-2\frac{abc}{4\cdot A\,[ABC]}\cdot r \\ &= R^2-\frac{abc}{a+b+c}, \end{aligned}$$

de unde $OI=OV=\sqrt{R^2-\frac{abc}{a+b+c}}$ (unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi $p=\frac{a+b+c}{2}$). □

Observaţia 447 *Anticomplementul punctului lui Bevan se numeşte punctul lui Longuet – Higgins (L_o), deci $\overrightarrow{L_oG}=2\overrightarrow{GV}$.*

Teorema 448 *Complementul V^* al punctului lui Bevan al triunghiului ABC este mijlocul segmentului IH, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi H ortocentrul triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $\{V^*\}=VG\cap IH$. Deoarece $HG=2GO$ şi $IG=2GS_p$ (unde S_p este punctul lui Spieker al triunghiului ABC), rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului IVH, deci VV^* este mediană, de unde $VG=2GV^*$, relaţie ce arată că V^*- mijlocul segmentului $IH-$ este complementul punctului lui Bevan. □

Teorema 449 *Raza cercului lui Bevan este egală cu $2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie R_V raza cercului Bevan şi a',b',c' lungimile laturilor triunghiului $I_aI_bI_c$. Deoarece $m(\widehat{BI_aC})=90^\circ-\frac{1}{2}m(\widehat{A})$, $m(\widehat{CI_bA})=90^\circ-\frac{1}{2}m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{AI_cB})=90^\circ-\frac{1}{2}m(\widehat{C})$ (vezi [12, § III.10]), iar triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$, rezultă

$$a=a'\cos\widehat{BI_aC}=a'\cos\left[90^\circ-\frac{1}{2}m(\widehat{A})\right]=a'\sin\frac{A}{2},$$

de unde $a'=\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}$. Analog, $b'=\frac{b}{\sin\frac{B}{2}}$, şi $c'=\frac{c}{\sin\frac{C}{2}}$. Atunci,

$$\begin{aligned} R_V &= \frac{a'b'c'}{4A_{[I_aI_bI_c]}}=\frac{abc}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot R(a+b+c)} \\ &= \frac{abc}{2\cdot A_{[ABC]}}=2R, \end{aligned}$$

unde $A_{[I_aI_bI_c]}=R\,(a+b+c)\,,\ R=\frac{abc}{4A_{[ABC]}},\ A_{[ABC]}=4Rp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. □

Teorema 450 *Punctul lui Bevan (V) al triunghiului ABC şi I centrul cercului înscris triunghiului ABC se află la aceeaşi distanţă faţă de dreapta lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Dreapta lui Euler a triunghiului ABC trece prin centrul circumscris O al triunghiului ABC, iar cum V şi I sunt egal depărtate de O, rezultă că V şi I se află la aceeaşi distanţă faţă de dreapta lui Euler a triunghiului ABC. □

Teorema 451 *Punctul lui Nagel (N), Longchamps (L) şi Bevan (V) ale triunghiului ABC sunt coliniare şi $NV \equiv VL$.*

Demonstraţie. Fie H, G, I, O ortocentrul, centrul de greutate, centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 1.106). Avem

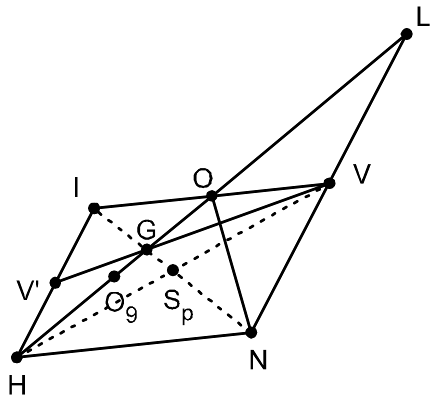

Figura 1.106: $N - V - L$

$HN \parallel OI$ şi $HN = 2OI$, V este simetricul lui I faţă de O, iar L este simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de O. Avem

$$\frac{NI}{NG} = \frac{3}{2}, \frac{VO}{VI} = \frac{1}{2}, \frac{LG}{LO} = \frac{4}{3},$$

de unde

$$\frac{NI}{NG} \cdot \frac{VO}{VI} \cdot \frac{LG}{LO} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul IGO rezultă că punctele L, V şi N sunt coliniare. Mai mult, deoarece $OI \parallel HN$ rezultă $OV \parallel HN$ şi cum O este mijlocul segmentului HL rezultă că V este mijlocul segmentului LN, deci $LV \equiv VN$. □

Teorema 452 *Dacă N, O, H, V sunt punctul lui Nagel, centrul cercului circumscris, ortocentrul şi respectiv punctul lui Bevan corespunzător triunghiului ABC, atunci $HN = 2OV = IV$.*

Demonstraţie. Vezi teorema 451. □

Teorema 453 *Ortocentrul H, punctul lui Spieker Sp, punctul lui Bevan V ale unui triunghi ABC sunt coliniare şi $HSp \equiv SpV$.*

Demonstraţie. Punctul lui Spieker este coliniar cu I şi N şi $ISp \equiv SpNa$. Avem

$$\frac{SpI}{SpG} = 3, \frac{HG}{HO} = \frac{2}{3}, \frac{VO}{VI} = \frac{1}{2},$$

de unde

$$\frac{SpI}{SpG} \cdot \frac{HG}{HO} \cdot \frac{VO}{VI} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul IGO rezultă că punctele H, Sp şi V sunt coliniare. Deoarece $IV \parallel HN$ şi $ISp \equiv SpN$, rezultă $HSp \equiv SpV$. □

Teorema 454 *Triunghiurile $HSpNa$ şi $VSpI$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Vezi teorema 453. □

Teorema 455 *Paralelele duse prin punctul lui Bevan al triunghiului ABC la bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC intersectează laturile opuse în punctele A', B', C'. Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.*

Demonstraţie. Deoarece V este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$, iar dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic respectiv cu punctele de intersecţie dintre mediatoarele laturilor triunghiului de referinţă sunt concurente (vezi [12, § III.1]) rezultă concluzia. □

1.25 PUNCTUL LUI EXETER

„Dacă mă simt nefericit, rezolv o problemă de matematică pentru a deveni fericit ... dacă sunt fericit, atunci compun o problemă de matematică pentru a mă menţine fericit.” - Turan

Teorema 456 *Fie $T_AT_BT_C$ triunghiul tangenţial corespunzător triunghiului ABC şi A', B', C' punctele în care medianele duse din vârfurile A, B, C intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Dreptele T_AA', T_BB', T_CC' sunt concurente.*