Teorema 452 *Dacă N, O, H, V sunt punctul lui Nagel, centrul cercului circumscris, ortocentrul şi respectiv punctul lui Bevan corespunzător triunghiului ABC, atunci $HN = 2OV = IV$.*

Demonstraţie. Vezi teorema 451. □

Teorema 453 *Ortocentrul H, punctul lui Spieker Sp, punctul lui Bevan V ale unui triunghi ABC sunt coliniare şi $HSp \equiv SpV$.*

Demonstraţie. Punctul lui Spieker este coliniar cu I şi N şi $ISp \equiv SpNa$. Avem

$$\frac{SpI}{SpG} = 3, \frac{HG}{HO} = \frac{2}{3}, \frac{VO}{VI} = \frac{1}{2},$$

de unde

$$\frac{SpI}{SpG} \cdot \frac{HG}{HO} \cdot \frac{VO}{VI} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul IGO rezultă că punctele H, Sp şi V sunt coliniare. Deoarece $IV \parallel HN$ şi $ISp \equiv SpN$, rezultă $HSp \equiv SpV$. □

Teorema 454 *Triunghiurile $HSpNa$ şi $VSpI$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Vezi teorema 453. □

Teorema 455 *Paralelele duse prin punctul lui Bevan al triunghiului ABC la bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC intersectează laturile opuse în punctele A', B', C'. Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.*

Demonstraţie. Deoarece V este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$, iar dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic respectiv cu punctele de intersecţie dintre mediatoarele laturilor triunghiului de referinţă sunt concurente (vezi [12, § III.1]) rezultă concluzia. □

1.25 PUNCTUL LUI EXETER

„Dacă mă simt nefericit, rezolv o problemă de matematică pentru a deveni fericit ... dacă sunt fericit, atunci compun o problemă de matematică pentru a mă menţine fericit.” - Turan

Teorema 456 *Fie $T_AT_BT_C$ triunghiul tangenţial corespunzător triunghiului ABC şi A', B', C' punctele în care medianele duse din vârfurile A, B, C intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Dreptele T_AA', T_BB', T_CC' sunt concurente.*

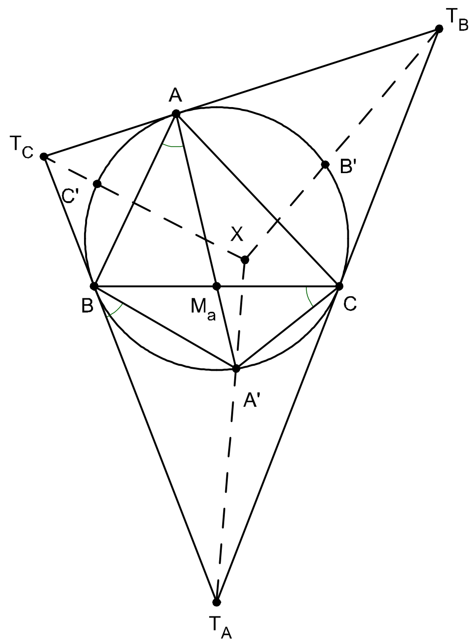

Figura 1.107: Punctul lui Exeter

Demonstraţie. Notăm cu $\alpha_1 = m(\widehat{BT_AA'})$, $\alpha_2 = m(\widehat{CT_AA'})$, $x = m(\widehat{BAA'})$, $y = m(\widehat{CAA'})$ şi fie M_a mijlocul laturii BC. Avem:

$$\widehat{BAA'} \equiv \widehat{BCA'} \equiv \widehat{A'BT_A} \text{ şi } \widehat{CAA'} \equiv \widehat{CBA'} \equiv \widehat{A'CT_A}.$$

Din teorema sinusurilor în triunghiurile $BA'T_A$ şi $CA'T_A$ rezultă:

$$\frac{\sin\alpha_1}{BA'} = \frac{\sin x}{A'T_A} \text{ şi } \frac{\sin\alpha_2}{CA'} = \frac{\sin y}{A'T_A},$$

de unde

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{BA'}{CA'} \tag{i}$$

(Figura 1.107). Din teorema sinusurilor în triunghiurile $BA'M_a$ şi $CA'M_a$ rezultă: $\frac{\sin\widehat{BM_aA'}}{BA'} = \frac{\sin y}{A'M_a}$ şi $\frac{\sin\widehat{CM_aA'}}{CA'} = \frac{\sin x}{A'M_a}$ de unde

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\sin x}{\sin y} \tag{ii}$$

(unde s-a folosit faptul că $\sin\widehat{CM_aA'} = \sin(180^\circ - \widehat{BM_aA'}) = \sin(\widehat{BM_aA'})$). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2.$$

Notăm $\beta_1 = m(\widehat{CT_BB'})$, $\beta_2 = m(\widehat{AT_BB'})$, $\gamma_1 = m(\widehat{AT_CC'})$, $\gamma_2 = m(\widehat{BT_CC'})$, $z = m(\widehat{B'BC})$, $t = m(\widehat{B'BA})$, $u = m(\widehat{C'CA})$, $v = m(\widehat{C'CB})$. Analog se arată că $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \left(\frac{\sin z}{\sin t}\right)^2$ şi $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \left(\frac{\sin u}{\sin v}\right)^2$. Din forma trigonometrică a teoremei lui Ceva avem că $\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin z}{\sin t} \cdot \frac{\sin u}{\sin v} = 1$ (datorită concurenţei medianelor); atunci,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \left(\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin z}{\sin t} \cdot \frac{\sin u}{\sin v}\right)^2 = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele T_AA', T_BB', T_CC' sunt concurente într-un punct X. □

Observaţia 457 *Punctul X de concurenţă al dreptelor T_AA', T_BB', T_CC' se numeşte* ***punctul lui Exeter.***

Teorema 458 *Triunghiul tangenţial al unui triunghi ABC şi triunghiul circumpedal al centrului de greutate al triunghiului ABC sunt omologice.*

Demonstraţie. Vezi teorema 456. □

Teorema 459 *Punctul lui Exeter al triunghiului ABC este centrul de omologie dintre triunghiul tangenţial şi triunghiul circumpedal al centrului de greutate al triunghiului ABC.*

Teorema 460 *Coordonatele baricentrice ale punctului lui Exeter sunt:*

$$X(a^2(b^4 + c^4 - a^4), b^2(c^4 + a^4 - b^4), c^2(a^4 + b^4 - c^4))$$

Demonstraţie. Vezi [40]. □

Teorema 461 *Punctul lui Exeter al triunghiului ABC aparţine dreptei lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema utilizând coordonatele baricentrice; astfel, $G(1, 1, 1)$, $O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$ şi

$$X(a^2(b^4 + c^4 - a^4), b^2(c^4 + a^4 - b^4), c^2(a^4 + b^4 - c^4)).$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} a^2(b^4 + c^4 - a^4) & b^2(c^4 + a^4 - b^4) & c^2(a^4 + b^4 - c^4) \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că punctele G, O şi X sunt coliniare (am ţinut cont că $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$). □