1.27 PUNCTUL LUI GRAY

„Tot ce e gândire corectă este sau matematică sau susceptibilă de matematizare."- Grigore Moisil[35]

Teorema 465 *Fie X, Y, Z simetricele centrului cercului înscris în triunghiul ABC faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie DEF triunghiul ortic al triunghiului $I_1I_2I_3$. Deoarece dreptele

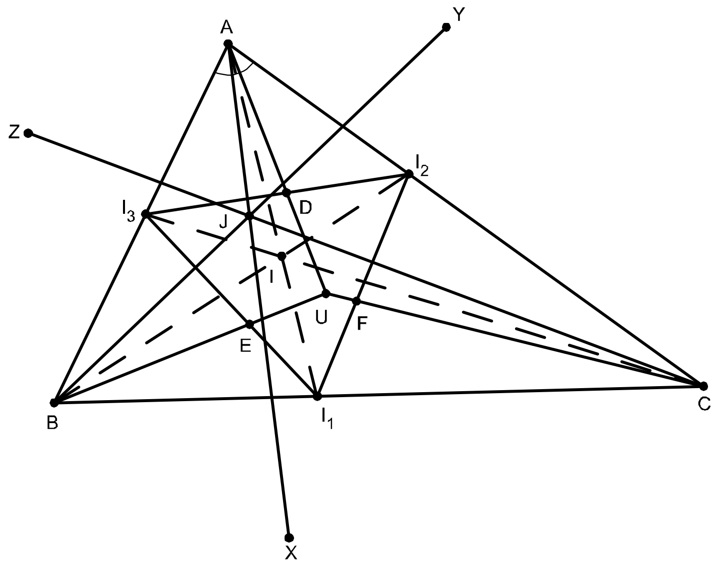

Figura 1.109: Punctul lui Gray

AI_1, BI_2, CI_3, respectiv I_1D, I_2E, I_3F sunt concurente, atunci din teorema lui Dottl rezultă că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct U (Figura 1.109). Deoarece AD, BE şi CF sunt izogonalele dreptelor AX, BY, respectiv CZ – vezi „Triunghiul I cevian" – rezultă că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente în punctul izogonal conjugat al lui U. □

Observaţia 466 *Punctul de concurenţă al dreptelor AX, BY şi CZ se numeşte* ***punctul lui Gray***[36] *(J) al triunghiului ABC, iar XYZ se numeşte* ***triunghiul lui Gray*** *corespunzător triunghiului ABC.*

Teorema 467 *Punctul lui Gray al triunghiului ABC este coliniar cu centrul cercului înscris (I) în triunghiul ABC şi cu ortocentrul triunghiului I – cevian.*

[35] Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iaşi, membru al Academiei Române, contribuţii importante în informatică

[36] Andrew Gray (1847-1925) – matematician scoţian, profesor la Universitatea din Glasgow

Demonstraţie. Fie J punctul lui Gray al triunghiului ABC, $I_1I_2I_3$ triunghiul I cevian, DEF triunghiul ortic al triunghiului $I_1I_2I_3$, H' ortocentrul triunghiului $I_1I_2I_3$, X, Y, Z simetricele lui I faţă de laturile BC, CA, respectiv AB şi $A_1B_1C_1$ triunghiul J – cevian în raport cu triunghiul ABC.

Triunghiurile DEF şi $A_1B_1C_1$ sunt omologice, I fiind centrul de omologie (vezi [12, § III.12]). Deoarece triunghiurile ABC şi $I_1I_2I_3$ sunt omologice, I fiind centrul omologiei, atunci conform teoremei (vezi [12, § III.21]) rezultă că dreptele I_1D, I_2E, I_3F şi IJ sunt concurente, deci $H' \in IJ$. □

Teorema 468 *Fie XYZ triunghiul Gray corespunzător triunghiului ABC, $I_1I_2I_3$ triunghiul I – cevian corespunzător triunghiului ABC, $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic, $\{M\} = XY \cap BC, \{M\} = YZ \cap AB, \{A_1\} = H_bI_3 \cap BC, \{C_1\} = AB \cap H_aH_b$. Bisectoarea interioară a unghiului I_3A_1B intersectează latura AB în N'', iar bisectoarea interioară a unghiului BC_1H_a intersectează latura BC în M''. Dreptele MN şi $M''N''$ sunt paralele.*

Demonstraţie. Deoarece BH_a este bisectoarea exterioară a unghiului $C_1H_aI_3$

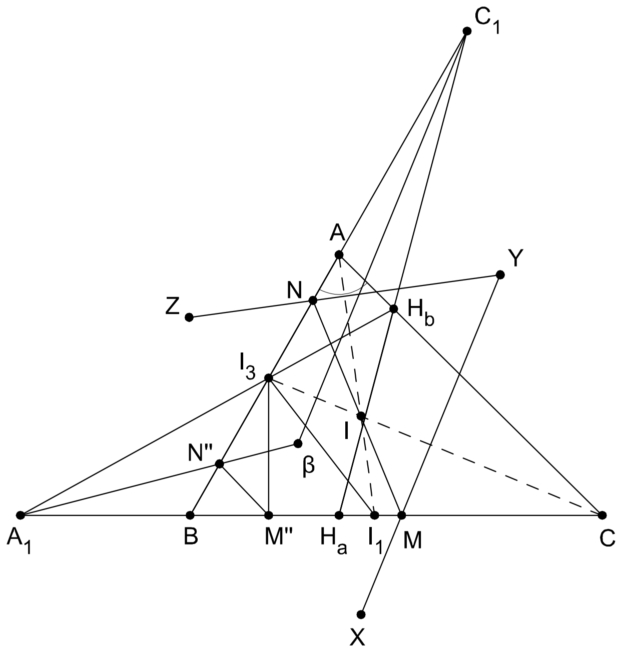

Figura 1.110: Triunghiul lui Gray

rezultă că M'' este centrul cercului înscris în triughiul $C_1H_aH_c$ rezultă H_cM'' este bisectoarea unghiului $C_1H_cH_a$. Rezultă că $I_3M'' \perp BC$ (vezi [12, § III.1]) şi $I_1N'' \perp AB$, adică patrulaterul $N''M''I_1I_3$ este inscriptibil (Figura 1.110). Patrulaterul MNI_3I_1 este inscriptibil (cf. th. 467). Cercurile circumscrise patrulaterelor $N''M''I_1I_3$ şi MNI_3I_1 se intersectează în punctele I_1 şi I_3, deci $MN \parallel M''N''$ (cf. th. 469). □

Teorema 469 (***Teorema lui Reim***) *Fie C, D punctele de intersecţie dintre cercurile C_1 şi C_2. Fie $A, B \in C_1$ şi $E, F \in C_2$ astfel încât punctele A, C, F şi B, D, E sunt coliniare. Dreptele AB şi EF sunt paralele.*

Demonstraţie. Fie $T \in AF$ astfel încât $F \in [CT]$ (Figura 1.111). Avem $m(\sphericalangle BDC) =$

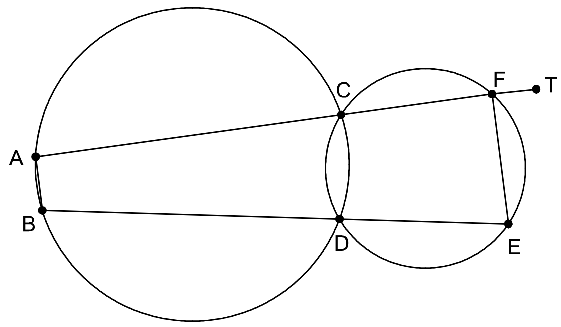

Figura 1.111: Teorema lui Reim

$m(\sphericalangle EFC)$ de unde rezultă că:

$$m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle EFT) = 180^\circ - m(\sphericalangle BDC),$$

deci $EF \parallel AB$. □

Teorema 470 *Dacă $A_1N'' \cap C_1M'' = \{\beta\}$, atunci punctele B, β şi Y sunt coliniare.*

Demonstraţie. Dreptele A_1N'' şi AI sunt perpendiculare fiind bisectoarele unghiurilor H_bA_1C şi respectiv BAC (patrulaterul BH_cH_bC fiind inscriptibil). Cum $AI \perp ZY$ rezultă $A_1N'' \parallel ZY$ şi analog $C_1M'' \parallel XY$. Conform proprietăţii precedente $MN \parallel M''N''$ şi cum $MM'' \cap NN'' = \{B\}$ rezultă că triunghiurile $N''M''\beta$ şi NMY sunt omotetice (centrul de omotetie fiind punctul B), deci punctele B, β şi Y sunt coliniare. □

Teorema 471 *Fie XZY triunghiul lui Gray al triunghiului ABC, $\{M\} = XY \cap BC$. Punctele M, C, Y şi centrul cercului (I) înscris în triunghiul ABC sunt conciclice.*

Demonstraţie. Deoarece $IX = IY = 2r$ rezultă că $IC \perp XY$ ($XC \equiv YC \equiv CI$), de unde rezultă $\sphericalangle IYX \equiv \sphericalangle ICY$ (unghiuri cu laturile perpendiculare două câte două). Cum $\sphericalangle ICY \equiv \sphericalangle ICM$ rezultă $\sphericalangle IYM \equiv \sphericalangle ICM$, deci patrulaterul $IMCY$ este inscriptibil. □

Teorema 472 *Fie XZY triunghiul lui Gray al triunghiului ABC, $\{M\} = XY \cap BC$. Dreapta IX este tangentă cercului circumscris patrulaterului $IMCY$, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece $\sphericalangle MIX \equiv \sphericalangle IXM \equiv \sphericalangle IYM$ rezultă concluzia. □

Teorema 473 *Dacă XZY triunghiul lui Gray al triunghiului ABC, $\{M\} = XY \cap BC$, $\{C_a\} = IX \cap BC$, atunci $C_aM = \frac{r^2}{p-c}$.*

Demonstraţie. Din puterea unui punct faţă de un cerc rezultă $C_aI^2 = C_aM \cdot C_aC$, de unde $C_aM = \frac{r^2}{p-c}$ (relaţie care determină poziţia punctului M pe latura BC). □

Teorema 474 *Fie XYZ triunghiul lui Gray corespunzător unui triunghi ABC, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $I_1I_2I_3$ triunghiul I – cevian în raport cu triunghiul ABC, Y' simetricul lui Y faţă de dreapta BI, $\{M'\} = XY' \cap BC, \{N'\} = ZY' \cap AB$. Dreptele $M'N'$ şi I_1I_3 sunt paralele.*

Demonstraţie. Fie $\{M\} = XY \cap BC, \{N\} = ZY \cap AB$ (Figura 1.112). Din

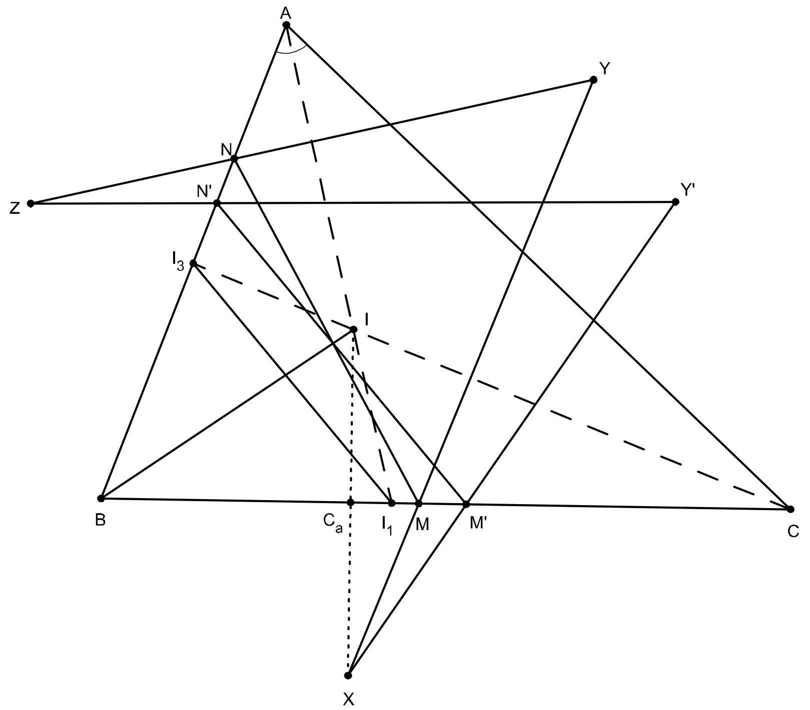

Figura 1.112: Triunghiul lui Gray - $I_1I_2I_3$

teorema bisectoarei $\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{c}{b}$ şi $\frac{I_3B}{I_3A} = \frac{a}{b}$, de unde

$$BI_1 = \frac{ab}{b+c}, BI_3 = \frac{ac}{a+b}.$$

Avem: $r^2 = C_aM \cdot C_aC$, sau

$$r^2 = C_cN' \cdot C_aC = C_aM' \cdot C_cA,$$

deci $C_aM' = \frac{r^2}{p-a}$. Dar

$$BM' = BC_a + C_aM' = (p-b) + \frac{r^2}{p-a} = \frac{(p-b)(b+a)}{p}.$$

Analog, $BN' = \frac{(p-b)(b+c)}{p}$ şi de aici rezultă $\frac{BI_1}{BI_3} = \frac{BM'}{BN'}$, iar din reciproca teoremei Thales rezultă $I_1I_3 \parallel M'N'$. □

Teorema 475 *Patrulaterul $MM'NN'$ este trapez isoscel.*

Demonstraţie. Deoarece punctele M şi N' respectiv M' şi N sunt simetrice faţă de BI, rezultă concluzia. □

Teorema 476 *Punctele M, N, I_3, I_1 sunt conciclice.*

Demonstraţie. Deoarece $MM'NN'$ este trapez isoscel rezultă $\sphericalangle MM'N' \equiv \sphericalangle MNN'$ (i); din $I_1I_3 \parallel M'N'$ rezultă $\sphericalangle BI_1I_3 \equiv \sphericalangle BM'N'$ (ii). Din (i) şi (ii) rezultă $\sphericalangle BI_1I_3 \equiv \sphericalangle MNI_3$, adică patrulaterul MNI_3I_1 este inscriptibil. □

Teorema 477 *Fie XYZ triunghiul lui Gray corespunzător unui triunghi ABC. Triunghiurile XYZ şi ABC sunt bilogice, centrul de ortologie fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă. □

Teorema 478 (***Teorema lui Ayme***) *Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC şi $A_1B_1C_1$ axa ortică a sa, $b', b", b'''$ bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{H_aB_1A}$, $\widehat{H_cA_1B}$, respectiv $\widehat{H_aC_1A}$, iar $\{\alpha\} = b' \cap b'''$, $\{\beta\} = b'' \cap b'''$, $\{\gamma\} = b' \cap b''$. Triunghiurile ABC şi $\alpha\beta\gamma$ sunt omologice, punctul lui Gray al triunghiului ABC fiind centrul omologiei.*

Demonstraţie. Deoarece $\alpha \in AX, \beta \in BY, \gamma \in CZ$- conform teoremei lui Casey (vezi [12, § III.21]) – şi cum $AX \cap BY \cap CZ = \{J\}$ rezultă că $A\alpha \cap B\beta \cap C\gamma = \{J\}$, unde J este punctul lui Gray al triunghiului ABC, deci triunghiurile ABC şi $\alpha\beta\gamma$ sunt omologice, punctul lui Gray al triunghiului ABC fiind centrul omologiei. □

Observaţia 479 *Din teorema precedentă rezultă că triunghiurile ABC, $\alpha\beta\gamma$ şi XYZ sunt omologice, punctul lui Gray fiind centrul omologiei.*

Teorema 480 *Fie XYZ triunghiul lui Gray corespunzător unui triunghi ABC, $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Axa de omologie dintre triunghiurile ABC şi XYZ este paralelă cu axa ortică a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $\{A_1\} = H_bH_c \cap BC, \{B_1\} = H_aH_c \cap AC$ şi $\{C_1\} = H_aH_b \cap AB$; dreapta $A_1B_1C_1$ este axa ortică a triunghiului ABC (vezi „Axa ortică”). Deoarece $AX \cap BY \cap CZ = \{J\}$ (J – punctul lui Gray) atunci triunghiurile ABC şi XYZ sunt omologice, fie d axa lor de omologie. Fie $A_1A_2 \parallel YZ, B_1B_2 \parallel ZX, C_1C_2 \parallel XY$, $\{A_3\} = B_1B_2 \cap C_1C_2, \{B_3\} = A_1A_2 \cap C_1C_2, \{C_3\} = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Din teorema lui Ayme rezultă că triunghiurile ABC, XYZ şi $A_3B_3C_3$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gray (J) al triunghiului ABC. Axa de omologie dintre triunghiurile ABC şi $A_3B_3C_3$ este axa ortică a triunghiului ABC şi conform teoremei lui Casey rezultă că dreapta $d \parallel A_1B_1$. □

Teorema 481 (***Teorema lui Gray***) *Fie J punctul lui Gray corespunzător unui triunghi ABC şi I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dreapta lui Euler a triunghiului ABC este paralelă cu dreapta IJ.*

Demonstraţie. Punctul I este centrul de ortologie al triunghiurilor ABC şi XYZ şi J este centrul de omologie dintre aceste triunghiuri. Din teorema lui Sondat rezultă $IJ \perp d$ (unde d este axa de omologie dintre triunghiurile ABC şi XYZ), cum $d \parallel A_1B_1$ (unde A_1B_1 este axa ortică a triunghiului ABC) rezultă $IJ \perp A_1B_1$. Deoarece dreapta lui Euler a triunghiului ABC este perpendiculară pe axa ortică a triunghiului ABC (vezi „Axa ortică”) rezultă că dreapta lui Euler este paralelă cu dreapta IJ. □

Observaţia 482 *Dreapta IJ se numeşte* ***dreapta lui Gray****.*

1.28 PUNCTUL LUI HEXYL

„Matematica este calea de înţelegere a Universului.”- Pitagora[37]

Teorema 483 *Fie O_a, O_b, O_c simetricele centrului cercului circumscris (O) al unui triunghi ABC faţă de laturile BC, CA, respectiv AB şi $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Dreptele O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c sunt concurente.*

Demonstraţie. Dacă M_a este mijlocul lui BC, atunci $2OM_a = AH$ (vezi [12, § III.1]), deci $AH = OO_a$; cum $AH \perp BC$ şi $OO_a \perp BC$ rezultă $AH \equiv OO_a$ adică patrulaterul AHO_aO este paralelogram (Figura 1.113). Mijlocul diagonalei AO_a este O_9 - mijlocul segmentului $[OH]$. Fie A', B', C' simetricele punctelor H_a, H_b, respectiv H_c faţă de centrul cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC. Patrulaterul AHO_aA' este paralelogram (deoarece O_9 este mijlocul diagonalelor AO_a şi H_aA'), deci $AA' \parallel H_aO_a$. Analog, se arată că $BB' \parallel H_bO_b$ şi $CC' \parallel H_cO_c$. Deoarece dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în punctul lui Prasolov (vezi „Punctul lui Prasolov”) rezultă că şi simetricele acestora faţă de centrul lui Euler sunt concurente. □

Observaţia 484 *Punctul de concurenţă al dreptelor O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c se numeşte punctul lui Hexyl (H_x) al triunghiului ABC.*

Teorema 485 *Punctul lui Hexyl este simetricul punctului lui Prasolov (P_v) faţă de centrul cercului triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi teorema 483. □

[37] Pitagora (580-500 î .Hr.) – filosof şi matematician grec