Teorema 481 (***Teorema lui Gray***) *Fie J punctul lui Gray corespunzător unui triunghi ABC şi I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dreapta lui Euler a triunghiului ABC este paralelă cu dreapta IJ.*

Demonstraţie. Punctul I este centrul de ortologie al triunghiurilor ABC şi XYZ şi J este centrul de omologie dintre aceste triunghiuri. Din teorema lui Sondat rezultă $IJ \perp d$ (unde d este axa de omologie dintre triunghiurile ABC şi XYZ), cum $d \parallel A_1B_1$ (unde A_1B_1 este axa ortică a triunghiului ABC) rezultă $IJ \perp A_1B_1$. Deoarece dreapta lui Euler a triunghiului ABC este perpendiculară pe axa ortică a triunghiului ABC (vezi „Axa ortică") rezultă că dreapta lui Euler este paralelă cu dreapta IJ. □

Observaţia 482 *Dreapta IJ se numeşte **dreapta lui Gray**.*

1.28 PUNCTUL LUI HEXYL

„Matematica este calea de înţelegere a Universului."- Pitagora[37]

Teorema 483 *Fie O_a, O_b, O_c simetricele centrului cercului circumscris (O) al unui triunghi ABC faţă de laturile BC, CA, respectiv AB şi $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Dreptele O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c sunt concurente.*

Demonstraţie. Dacă M_a este mijlocul lui BC, atunci $2OM_a = AH$ (vezi [12, § III.1]), deci $AH = OO_a$; cum $AH \perp BC$ şi $OO_a \perp BC$ rezultă $AH \equiv OO_a$ adică patrulaterul AHO_aO este paralelogram (Figura 1.113). Mijlocul diagonalei AO_a este O_9 - mijlocul segmentului $[OH]$. Fie A', B', C' simetricele punctelor H_a, H_b, respectiv H_c faţă de centrul cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC. Patrulaterul AHO_aA' este paralelogram (deoarece O_9 este mijlocul diagonalelor AO_a şi H_aA'), deci $AA' \parallel H_aO_a$. Analog, se arată că $BB' \parallel H_bO_b$ şi $CC' \parallel H_cO_c$. Deoarece dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în punctul lui Prasolov (vezi „Punctul lui Prasolov") rezultă că şi simetricele acestora faţă de centrul lui Euler sunt concurente. □

Observaţia 484 *Punctul de concurenţă al dreptelor O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c se numeşte punctul lui Hexyl (H_x) al triunghiului ABC.*

Teorema 485 *Punctul lui Hexyl este simetricul punctului lui Prasolov (P_v) faţă de centrul cercului triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi teorema 483. □

[37] Pitagora (580-500 î .Hr.) – filosof şi matematician grec

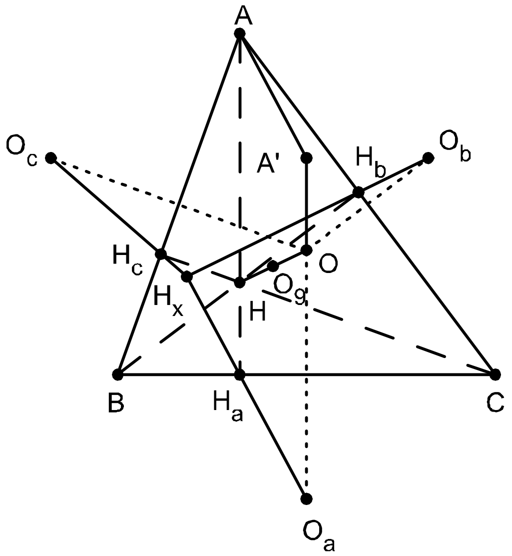

Figura 1.113: Punctul lui Hexyl

Observaţia 486 *Punctele H_x, O_9 şi P_v sunt coliniare şi $H_xO_9 \equiv O_9P_x$.*

Teorema 487 *Punctul lui Hexyl este ortocentrul triunghiului tangenţial al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.8]. □

Teorema 488 *Punctul lui Hexyl al unui triunghi ABC este coliniar cu punctul lui Lemoine şi centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Triunghiul tangenţial al triunghiului ABC este ortologic şi omologic cu triunghiul median al triunghiului ortic al triunghiului ABC, centrele de ortologie fiind punctul lui Hexyl (H_x) şi centrul cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC (vezi „Triunghiul tangenţial"). Conform teoremei lui Sondat punctele H_x, K şi O_9 sunt coliniare. □

Observaţia 489 *Din proprietatea precedentă rezultă că punctele H_x, K, O_9 şi P_v sunt coliniare.*