1.29 PUNCTUL LUI PRASOLOV

„Un matematician încearcă în munca sa aceeaşi plăcere ca şi un artist; plăcerea este tot atât de mare şi de aceeaşi natură.” – Henri Poincaré[38]

Fie A', B', C' simetricele vârfurilor triunghiului ortic al unui triunghi ascuţitunghic ABC faţă de centrul cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC.

Teorema 490 (***Teorema lui Prasolov***) *Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt omolo - gice.*

Demonstraţie. Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC, O_9 centrul

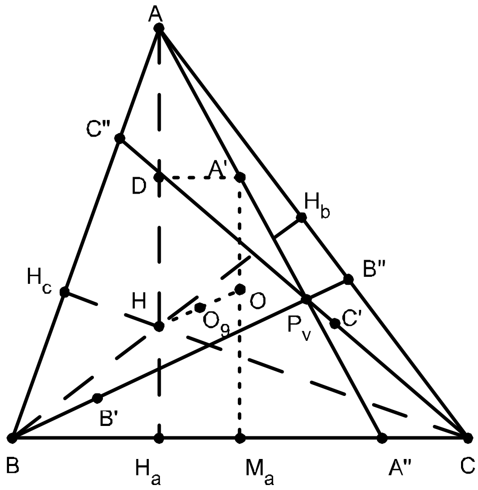

Figura 1.114: Punctul lui Prasolov

cercului lui Euler al triunghiului ABC şi $\{A''\} = AA' \cap BC$, $\{B''\} = BB' \cap AC$, $\{C''\} = CC' \cap AB$ (Figura 1.114). Deoarece patrulaterul $H_aOA'H$ este paralelogram şi $HH_a \perp BC$, rezultă că $A'O \perp BC$ - unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC – deci punctul A' este situat pe mediatoarea segmentului BC. Fie $A'D \perp AH_a, D \in AH_a$. Din asemănarea triunghiurilor ADA' şi AH_aA'' rezultă

$$\frac{A'D}{H_aA"} = \frac{AD}{AH_a},$$

adică

$$\frac{\frac{a}{2} - c\cos B}{H_aA''} = \frac{R\cos A}{c\sin B}$$

[38] Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician şi fizician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

(deoarece $A'D \equiv H_aM_a$), deci

$$H_aA'' = \frac{(2R\sin A - 2\cdot 2R\sin C\cos B)\sin C\sin B}{\cos A}.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} CA'' &= H_aA'' - H_aC \\ &= \frac{b\cos B}{\cos A}\cdot(1-2\sin^2 C) \\ &= \frac{R\sin 2B\cos 2C}{\cos A} \end{aligned}$$

şi

$$A''B = CA'' + BC = \frac{R[\sin 2B\cos 2C + \sin 2A]}{\cos A},$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{A''B}{A''C} &= \frac{\sin 2B\cos 2C + \sin 2A}{\sin 2B\cos 2C} = \frac{\sin(2B-2C)+\sin 2A}{2\sin 2B\cos 2C} \\ &= \frac{\sin 2C\cdot(-\cos 2B)}{\sin 2B\cos 2C} = -\frac{tg2C}{tg2B}. \end{aligned}$$

Analog, $\frac{B''C}{B''A} = -\frac{tg2A}{tg2C}$ şi $\frac{C''A}{C''B} = \frac{tg2B}{tg2A}$. Atunci,

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A'', B'', C'' sunt coliniare, iar din teorema lui Desargues rezultă că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt omologice. □

Observaţia 491 *Teorema s-a demonstrat pentru cazul corespunzător figurii date mai sus, teorema rămâne adevărată pentru orice configuraţie a punctelor A, B, C (triunghiul ABC rămânând ascuţitunghic), calculele suferind unele modificări. Centrul de omologie al triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ se numeşte* ***punctul lui Prasolov*** *P_v.*

Teorema 492 *Punctul lui Prasolov este simetricul punctului lui Hexyl faţă de centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Hexyl". □

Teorema 493 *Punctul lui Prasolov, punctul lui Lemoine şi centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Hexyl". □