1.30 PUNCT AL LUI KARIYA

„Noi venerăm Grecia antică drept leagăn al culturii, acolo lumea a asistat pentru prima oară la miracolul unui sistem logic în care paşii se succed cu o asemenea precizie încât propoziţiile lui apăreau ca absolul indubitabile – am în vedere geometria lui Euclid." – Albert Einstein[39]

Teorema 494 *Fie C_a, C_b, C_c punctele de contact cu laturile BC, CA, AB ale cercului înscris triunghiului ABC şi I centrul acestui cerc. Pe dreptele IC_a, IC_b, IC_c se consideră în acelaşi sens segmentele congruente IA', IB', IC'. Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.*

Demonstraţie. Se proiectează punctul A' în A_1 pe AC şi în A_2 pe AB; punctul

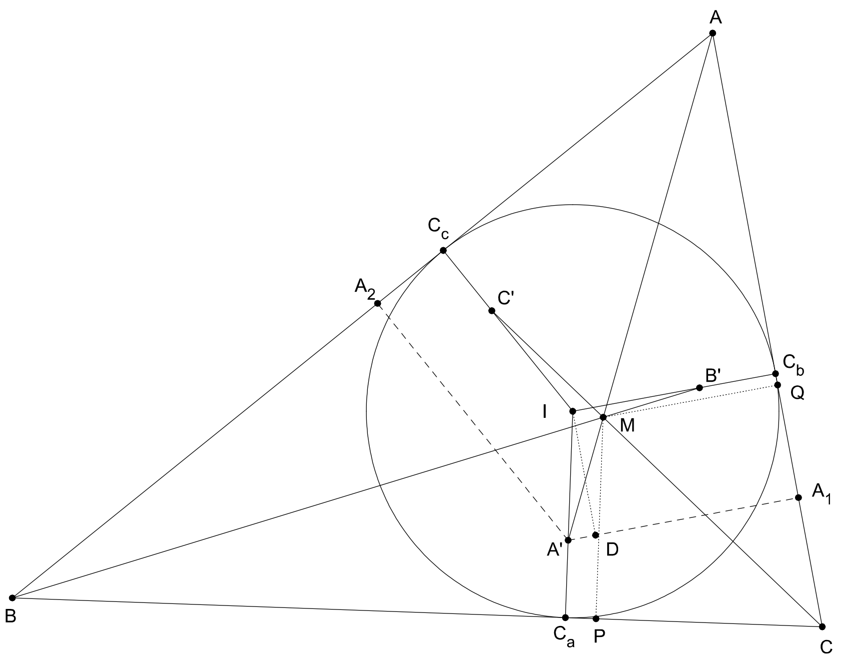

Figura 1.115: Punctul lui Kariya

B' în B_1 pe BC şi în B_2 pe AB; punctul C' în C_1 pe AC şi în C_2 pe BC. Fie D punctul de întâlnire al paralelei prin I la AC cu $A'A_1$ (Figura 1.115). Patrulaterul $A'A_1CC_a$ este inscriptibil, din $\widehat{C_aA'A_1} \equiv \widehat{ACB}$. Atunci

$$A'A_1 = C_aD + DA_1 = IA' \cos C + OC_b.$$

[39]Albert Einstein (1879-1955) – fizician german, profesor universitar la Berlin şi Princeton, laureat al Premiului Nobel

Analog, se obţin relaţiile

$$\begin{aligned} A'A_2 &= IA'\cos B + IC_c, B'B_1 = IB'\cos C + IC_a, \\ B'B_2 &= IB'\cos A + IC_c, C'C_1 = IC'\cos B + IC_a, \\ C'C_2 &= IC'\cos A + IC_b. \end{aligned}$$

Cum $IC_a = IC_b = IC_c = r$ şi $IA' = IB' = IC'$ rezultă

$$A'A_1 = B'B_1,\ A'A_2 = C'C_1,\ B'B_2 = C'C_2 \tag{i}$$

Dacă M este punctul comun dreptelor BB' şi CC', iar P, Q, R proiecţiile lui M pe laturile BC, CA, AB avem:

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{C'C_1}{C'C_2},\ \frac{MR}{MP} = \frac{B'B_2}{B'B_1}$$

Înmulţind egalităţile (i) şi (ii) rezultă:

$$\frac{MR}{MQ} = \frac{C'C_1 \cdot B'B_2}{C'C_2 \cdot B'B_1} = \frac{C'C_1}{B'B_1} = \frac{A'A_2}{A'A_1},$$

ceea ce arată că $M \in AA'$. □

Observaţia 495 *Punctul de concurenţă al dreptelor AA', BB' şi CC' este un* ***punct al lui Kariya.***

Teorema 496 *Fie A', B', C' punctele unde bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC intersectează cercul circumscris şi A'', B'', C'' simetricele centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC faţă de laturile $B'C', C'A'$, respectiv $A'B'$. Triunghiurile $A''B''C''$ şi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind un punct al lui Kariya al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC (Figura 1.116). Fie A''' al doilea punct de intersecţie dintre perpendiculara din I pe BC cu cercul circumscris triunghiului AIO. Deoarece patrulaterul $AA'''IO$ este inscriptibil rezultă $\sphericalangle IAO \equiv \sphericalangle IA'''O$ şi $\sphericalangle OAI \equiv \sphericalangle OA'I$, deci

$$\sphericalangle OA'''I \equiv \sphericalangle OA'I. \tag{i}$$

Întrucât $IA''' \perp BC$ şi $OA' \perp BC$ rezultă

$$IA''' \parallel OA'. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că patrulaterul $A'OA'''I$ este paralelogram, de unde $A'''O \parallel IA'$, adică $A'''O \parallel AI$, deci patrulaterul $AIOA'''$ este trapez isoscel. Cum I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ (vezi „Cercul înscris într-un triunghi") şi O este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ rezultă că $A'''O$ este mediatoarea segmentului $B'C'$. Din $AI \parallel A''O$ rezultă $\sphericalangle IAO \equiv \sphericalangle AOA''$; cum A'' este simetricul lui O faţă de $B'C'$ rezultă $\sphericalangle AOA'' \equiv \sphericalangle IA''O$, de unde

$$\sphericalangle IAO \equiv \sphericalangle IA''O. \tag{iii}$$

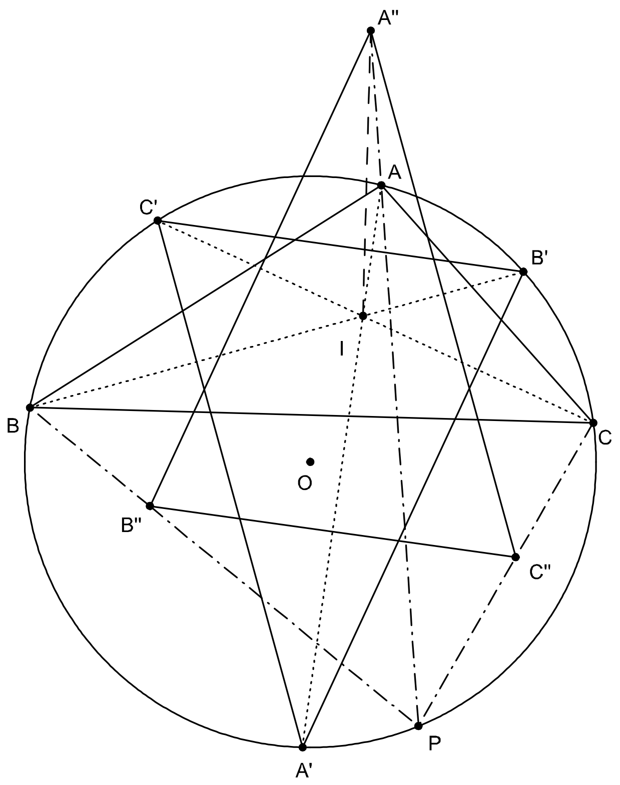

Figura 1.116: Drepte concurente intr-un punct al lui Kariya

Din relaţiile (i) şi (iii) rezultă $\sphericalangle IA''O \equiv \sphericalangle IA'''O$, iar cum A'', A''' aparţin mediatoarei segmentului $B'C'$ avem că punctele A'' şi A''' coincid. Deoarece A'', B'', C'' sunt centrele cercurilor lui Carnot corespunzătoare triunghiului $A'B'C'$ rezultă că ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ - adică punctul I – este centrul cercului circumscris triunghiului $A''B''C''$ (vezi „Cercurile Carnot") deci

$$IA'' = IB'' = IC'',$$

iar cum $IA'' \perp BC$, $IB'' \perp CA$, $IC'' \perp AB$ rezultă că dreptele AA'', BB'', CC'' sunt concurente într-un punct al lui Kariya al triunghiului ABC. □

Teorema 497 *Centrul de omologie P dintre triunghiurile $A''B''C''$ şi ABC aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Avem:

$$m(\sphericalangle CAA'') + m(\sphericalangle ACC'') = m(\sphericalangle PAC) + m(\sphericalangle ACP) = 180^\circ - m(\sphericalangle APC) \quad \text{(i)}$$

şi

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle CAA'') + m(\sphericalangle ACC'') &= [m(\sphericalangle IAA'') - m(\sphericalangle IAC)] + [m(\sphericalangle ICC'') - m(\sphericalangle ICA)] \\ &= [m(\sphericalangle IAA'') + m(\sphericalangle ICC'')] - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\ &= m(\sphericalangle AIC) - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\ &= 180^\circ - [m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] = m(\sphericalangle B). \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că $m(\sphericalangle APC)+m(\sphericalangle B) = 180^\circ$, adică patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil, deci P aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. □

Observaţia 498 *Demonstraţia suferă modificări dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, proprietatea rămânând adevărată. Punctele A'', B'', C'' sunt centrele cercurilor Carnot ale triunghiului $A'B'C'$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt punctele unde înălţimile triunghiului $A'B'C'$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC.*

1.31 PUNCTUL LUI SCHIFFLER

„Infinitul e mult mai mare / Decât ne închipuim,
N–o să putem niciodată / Să-l umplem cu sufletul nostru.” - Marin Sorescu[40]

Teorema 499 *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci dreptele lui Euler ale triunghiurilor BCI, CAI, ABI şi ABC sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom demonstra proprietatea utilizând coordonatele baricentrice. Astfel, $O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$, $H(tgA, tgB, tgC)$, $G(1,1,1)$, $I(a,b,c)$ (unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB).

Ecuaţia dreptei lui Euler OH a triunghiului ABC în coordonatele baricentrice este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$x(\sin 2C - \sin 2B) + y(\sin 2A - \sin 2C) + z(\sin 2B - \sin 2A) = 0.$$

Fie O_1, O_2, O_3 şi G_1, G_2, G_3 centrele cercurilor circumscrise, respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor BCI, CAI, respectiv ABI. Avem:

$$O_1(\sin(\pi + A), \sin B, \sin C) \equiv O_1(-\sin A, \sin B, \sin C)$$

[40] Marin Sorescu (1936-1996) – scriitor român