şi

$$\begin{aligned}
m(\sphericalangle CAA'') + m(\sphericalangle ACC'') &= [m(\sphericalangle IAA'') - m(\sphericalangle IAC)] + [m(\sphericalangle ICC'') - m(\sphericalangle ICA)] \\
&= [m(\sphericalangle IAA'') + m(\sphericalangle ICC'')] - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\
&= m(\sphericalangle AIC) - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] - \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] \\
&= 180^\circ - [m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)] = m(\sphericalangle B). \qquad \text{(ii)}
\end{aligned}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că $m(\sphericalangle APC) + m(\sphericalangle B) = 180^\circ$, adică patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil, deci P aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. □

Observaţia 498 *Demonstraţia suferă modificări dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, proprietatea rămânând adevărată. Punctele A'', B'', C'' sunt centrele cercurilor Carnot ale triunghiului $A'B'C'$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt punctele unde înălţimile triunghiului $A'B'C'$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC.*

1.31 PUNCTUL LUI SCHIFFLER

„Infinitul e mult mai mare / Decât ne închipuim,
N–o să putem niciodată / Să-l umplem cu sufletul nostru." - Marin Sorescu[40]

Teorema 499 *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci dreptele lui Euler ale triunghiurilor BCI, CAI, ABI şi ABC sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom demonstra proprietatea utilizând coordonatele baricentrice. Astfel, $O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$, $H(tgA, tgB, tgC)$, $G(1, 1, 1)$, $I(a, b, c)$ (unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB).

Ecuaţia dreptei lui Euler OH a triunghiului ABC în coordonatele baricentrice este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$x(\sin 2C - \sin 2B) + y(\sin 2A - \sin 2C) + z(\sin 2B - \sin 2A) = 0.$$

Fie O_1, O_2, O_3 şi G_1, G_2, G_3 centrele cercurilor circumscrise, respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor BCI, CAI, respectiv ABI. Avem:

$$O_1(\sin(\pi + A), \sin B, \sin C) \equiv O_1(-\sin A, \sin B, \sin C)$$

[40] Marin Sorescu (1936-1996) – scriitor român

şi $G_1(a, 1+b, 1+c)$.

Ecuaţia dreptei lui Euler a triunghiului BCI este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 1+b & 1+c \\ -\sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$(O_1G_1): x[(1+b)\sin C-(1+c)\sin B]-y[(1+c)\sin A+a\sin C]+z[(1+b)\sin A+a\sin B]=0$$

Analog, $O_2(\sin A, -\sin B, \sin C)$, $G_2(1+a, b, 1+c)$ şi $O_3(\sin A, \sin B, -\sin C)$, $G_3(1+a, 1+b, c)$ rezultă

$$(O_2G_2): x[-b\sin C-(1+c)\sin B]-y[(1+a)\sin C-(1+c)\sin A]+z[b\sin A+(1+a)\sin B]=0$$

şi

$$(O_3G_3): x[-c\sin B-(1+b)\sin C]-y[c\sin A-(1+a)\sin C]+z[(1+a)\sin B-(1+b)\sin A]=0.$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} (1+b)\sin C-(1+c)\sin B & -(1+c)\sin A-a\sin C & a\sin B+(1+b)\sin A \\ -b\sin C-(1+c)\sin B & (1+a)\sin C-(1+c)\sin A & b\sin A+(1+a)\sin B \\ -c\sin B-(1+b)\sin C & c\sin A-(1+a)\sin C & (1+a)\sin B-(1+b)\sin A \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că dreptele O_1G_1, O_2G_2, O_3G_3 sunt concurente (i). Analog se arată că:

$$\begin{vmatrix} (1+b)\sin C-(1+c)\sin B & -(1+c)\sin A-a\sin C & a\sin B+(1+b)\sin A \\ -b\sin C-(1+c)\sin B & (1+a)\sin C-(1+c)\sin A & b\sin A+(1+a)\sin B \\ \sin 2C-\sin 2B & \sin 2A-\sin 2C & \sin 2B-\sin 2A \end{vmatrix} = 0,$$

deci dreptele OH,O_1G_1, O_2G_2 sunt concurente (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că dreptele lui Euler ale triunghiurilor BCI, CAI, ABI şi ABC sunt concurente.

Observaţia 500 *Punctul S_h de concurenţă al dreptelor lui Euler ale triunghiurilor BCI, CAI, ABI şi ABC se numeşte* ***punctul lui Schiffler.***

Teorema 501 *Punctul lui Schiffler, ortocentrul şi centrul de greutate al unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi teorema 499. □