1.32 PUNCTUL LUI WEILL

„Matematica nu exclude poezia şi reciproc; matematica reunită cu poezia poate oferi un orizont mult mai vast pe care ochiul şi sufletul omenesc să-l cuprindă şi să-l apropie. Înţelegând şi savurând poezia am pătruns în templul armoniei, precum atunci când am înţeles matematica am pătruns în templul certitudinii." - Ion Barbu[41]

Punctul lui Weill[42] (W) al unui triunghi este centrul de greutate al triunghiului de contact al său (Figura 1.117).

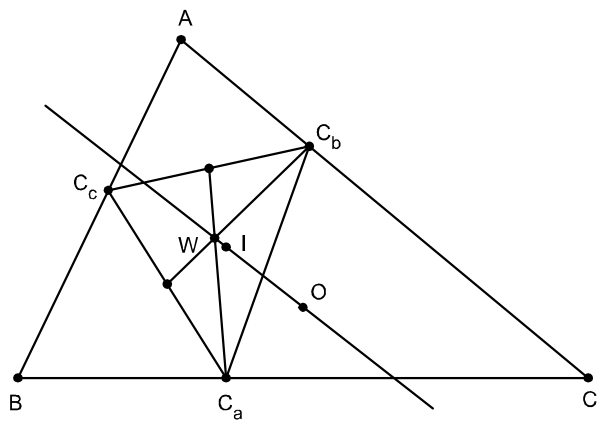

Figura 1.117: Punctul lui Weill

Teorema 502 *Dreapta WI este dreapta lui Euler a triunghiului de contact $C_aC_bC_c$, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece W este centrul de greutate al triunghiului $C_aC_bC_c$ şi I este centrul cercului circumscris triunghiului $C_aC_bC_c$, rezultă că WI este dreapta lui Euler a triunghiului $C_aC_bC_c$. □

Teorema 503 *Centrul cercului circumscris triunghiului ABC aparţine dreptei WI.*

Demonstraţie. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC aparţine dreptei lui Euler a triunghiului $C_aC_bC_c$ (vezi „Dreapta lui Euler"). □

Teorema 504 *Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este edevărată relaţia:*

$$\overrightarrow{MW}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{p-b}{c}+\frac{p-c}{b}\right)\overrightarrow{MA}+\left(\frac{p-c}{a}+\frac{p-a}{c}\right)\overrightarrow{MB}+\left(\frac{p-a}{b}+\frac{p-b}{a}\right)\overrightarrow{MC}\right]$$

[41] Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din Bucureşti, contribuţii în algebră şi geometrie

[42] André Weill (1906-1998) – matematician francez, profesor la Universitatea Princeton, contribuţii importante în algebră, analiză şi geometrie

Demonstraţie. Deoarece W este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă

$$\overrightarrow{MW} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MC_a} + \overrightarrow{MC_b} + \overrightarrow{MC_c}), \tag{i}$$

pentru orice punct M din planul triunghiului ABC. Dar $\frac{BC_a}{CC_a} = \frac{p-b}{p-c}$ de unde

$$\overrightarrow{MC_a} = \frac{1}{a}[(p-c)\overrightarrow{MB} + (p-b)\overrightarrow{MC})] \tag{ii}$$

Analog, se obţin relaţiile $\overrightarrow{MC_b} = \frac{1}{b}[(p-a)\overrightarrow{MC} + (p-c)\overrightarrow{MA})]$ (iii), $\overrightarrow{MC_c} = \frac{1}{c}[(p-b)\overrightarrow{MA} + (p-a)\overrightarrow{MB})]$ (iv). Din relaţiile (i)-(iv), rezultă concluzia. □

Consecinţa 505 *Coordonatele baricentrice relative ale punctului lui Weill al unui triunghi ABC sunt:*

$$W\left(\frac{p-c}{b} + \frac{p-b}{c}, \frac{p-a}{c} + \frac{p-c}{a}, \frac{p-a}{b} + \frac{p-b}{a}\right).$$

Teorema 506 *Coordonatele baricentrice absolute ale punctului lui Weill al unui triunghi ABC sunt :*

$$W\left(\frac{1}{9}\left(\frac{p-c}{b} + \frac{p-b}{c}\right), \frac{1}{9}\left(\frac{p-a}{c} + \frac{p-c}{a}\right), \frac{1}{9}\left(\frac{p-a}{b} + \frac{p-b}{a}\right)\right).$$

Demonstraţie. Deoarece

$$\frac{1}{3}\left(\frac{p-c}{b} + \frac{p-b}{c} + \frac{p-a}{c} + \frac{p-c}{a} + \frac{p-a}{b} + \frac{p-b}{a}\right) = \frac{12Rrp}{abc} = 3,$$

unde am utilizat relaţiile $a^3+b^3+c^3 = 2p(p^3-3r^2-6Rr)$ şi $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, rezultă concluzia. □

Teorema 507 *Centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris şi punctul lui Weill sunt coliniare.*

Demonstraţie. Demonstrăm teorema utilizând coordonatele baricentrice. Avem $I(a, b, c)$ şi $O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} \frac{p-c}{b} + \frac{p-b}{c} & \frac{p-a}{c} + \frac{p-c}{a} & \frac{p-a}{b} + \frac{p-b}{a} \\ a & b & c \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = 0$$

rezultă că punctele W, O şi I sunt coliniare. □

Teorema 508 *Este edevărată relaţia:*

$$\frac{WI}{WO} = \frac{r}{3R+r}.$$

Demonstraţie. Se arată că $\overrightarrow{MW} = \frac{(3R+r)\overrightarrow{MI}+r\overrightarrow{MO}}{2r+3R}$, utilizând relaţiile:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{R^2}{2S}(\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC})$$

şi

$$\overrightarrow{MI} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}.$$

□

1.33 PUNCTELE LUI PELLETIER

„Matematicienii sunt ca francezii: orice le spui traduc în limba lor şi drept urmare rezultă ceva complet diferit." – J. W. Goethe[43]

Teorema 509 (***Teorema lui Pelletier***) *Într-un triunghi ABC, dreptele care unesc picioarele înalţimilor corespunzătoare vârfurilor B şi C, picioarele bisectoarelor corespunzătoare vârfurilor B şi C şi punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AB şi AC sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema utilizând coordonatele baricentrice.

Lemă: *Fie punctele $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$ în planul unui triunghi ABC. Prin fiecare punct Q_i, $i = \overline{1,3}$, ducem cevienele AA_i, BB_i, CC_i, $i = \overline{1,3}$. Dreptele B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} 1/\alpha_1 & 1/\beta_1 & 1/\gamma_1 \\ 1/\alpha_2 & 1/\beta_2 & 1/\gamma_2 \\ 1/\alpha_3 & 1/\beta_3 & 1/\gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie lemă. Avem $B_i(\alpha_i, 0, \gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$, $C_i(\alpha_i, \beta_i, 0)$, $i = \overline{1,3}$. Ecuaţiile dreptelor B_iC_i sunt:

$$-\frac{x}{\alpha_i} + \frac{y}{\beta_i} + \frac{z}{\gamma_i} = 0, i = \overline{1,3}.$$

Condiţia de concurenţă a trei drepte conduce la concluzia problemei.

Demonstraţia teoremei. Coordonatele baricentrice ale ortocentrului, centrului cercului înscris şi ale punctului lui Gergonne corespunzătoare triunghiului ABC sunt: $H(ctgB{\cdot}ctgC, ctgC{\cdot}ctgA, ctgA{\cdot}ctgB)$, $I(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p})$, $\Gamma\left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)}, \frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)}, \frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)}\right)$. Conform lemei, dreptele sunt concurente dacă:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{tgA} & \frac{1}{tgB} & \frac{1}{tgC} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix} = 0.$$

[43] Johann Goethe (1749-1832) – poet, scriitor german