Demonstraţie. Se arată că $\overrightarrow{MW} = \frac{(3R+r)\overrightarrow{MI}+r\overrightarrow{MO}}{2r+3R}$, utilizând relaţiile:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{R^2}{2S}(\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC})$$

şi

$$\overrightarrow{MI} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}.$$

□

1.33 PUNCTELE LUI PELLETIER

„Matematicienii sunt ca francezii: orice le spui traduc în limba lor şi drept urmare rezultă ceva complet diferit." – J. W. Goethe[43]

Teorema 509 (***Teorema lui Pelletier***) *Într-un triunghi ABC, dreptele care unesc picioarele înalţimilor corespunzătoare vârfurilor B şi C, picioarele bisectoarelor corespunzătoare vârfurilor B şi C şi punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AB şi AC sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema utilizând coordonatele baricentrice.

Lemă: *Fie punctele $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$ în planul unui triunghi ABC. Prin fiecare punct Q_i, $i = \overline{1,3}$, ducem cevienele AA_i, BB_i, CC_i, $i = \overline{1,3}$. Dreptele B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} 1/\alpha_1 & 1/\beta_1 & 1/\gamma_1 \\ 1/\alpha_2 & 1/\beta_2 & 1/\gamma_2 \\ 1/\alpha_3 & 1/\beta_3 & 1/\gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie lemă. Avem $B_i(\alpha_i, 0, \gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$, $C_i(\alpha_i, \beta_i, 0)$, $i = \overline{1,3}$. Ecuaţiile dreptelor B_iC_i sunt:

$$-\frac{x}{\alpha_i} + \frac{y}{\beta_i} + \frac{z}{\gamma_i} = 0, i = \overline{1,3}.$$

Condiţia de concurenţă a trei drepte conduce la concluzia problemei.

Demonstraţia teoremei. Coordonatele baricentrice ale ortocentrului, centrului cercului înscris şi ale punctului lui Gergonne corespunzătoare triunghiului ABC sunt: $H(ctgB{\cdot}ctgC, ctgC{\cdot}ctgA, ctgA{\cdot}ctgB)$, $I(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p})$, $\Gamma\left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)}, \frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)}, \frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)}\right)$. Conform lemei, dreptele sunt concurente dacă:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{tgA} & \frac{1}{tgB} & \frac{1}{tgC} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix} = 0.$$

[43] Johann Goethe (1749-1832) – poet, scriitor german

Utilizăm formulele $tgA = \frac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$, $r = (p-a)tg\frac{A}{2}$, $a = 2R\sin A = 2R\frac{tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$. Notăm $tg\frac{A}{2} = m$, $tg\frac{B}{2} = n$, $tg\frac{C}{2} = p$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{m} - m & \frac{1}{n} - n & \frac{1}{p} - p \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & -n & -p \\ m & n & p \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{n} & \frac{1}{p} \end{vmatrix} = 0.$$

□

Observaţia 510 *Fie $A^{'}$ punctul de intersecţie al celor trei drepte. Analog se definesc punctele $B^{'}$ şi $C^{'}$. Punctele $A^{'}$, $B^{'}$ şi $C^{'}$ se numesc **punctele lui Pelletier**, iar $A^{'}B^{'}C^{'}$ se numeşte **triunghiul lui Pelletier.** Analog se arată că dreptele care unesc picioarele înalţimilor corespunzătoare vârfurilor B şi C, picioarele bisectoarelor corespunzătoare B şi C şi punctele de contact ale cercurilor exînscrise triunghiului ABC cu laturile AB şi AC sunt concurente (se consideră punctele I, H şi punctul lui Nagel $N(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p})$).*

Teorema 511 *Triunghiul ABC şi triunghiul lui Pelletier corespunzător sunt omologice.*

Demonstraţie. Fie I_1, I_2, I_3 picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A,

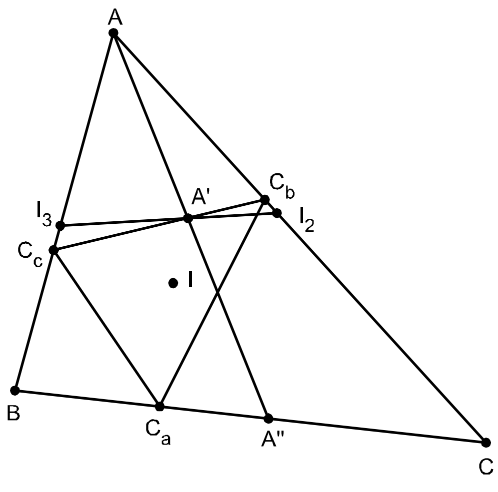

Figura 1.118: Punctele lui Pelletier

B, respectiv C şi $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC (Figura 1.118), atunci $\{A^{'}\} = C_bC_c \cap I_2I_3$, $\{B^{'}\} = C_aC_c \cap I_1I_3$ şi $\{C^{'}\} = C_aC_b \cap I_1I_2$ iar $\{A^{''}\} = AA^{'} \cap BC$, $\{B^{''}\} = BB^{'} \cap AC$, $\{C^{''}\} = CC^{'} \cap AB$ şi fără a restrânge generalitatea presupunem că $a > b > c$. Considerând triunghiul ABC, transversala C_cC_b şi ceviana $AA^{''}$ avem:

$$\frac{AC_c}{AB} \cdot \frac{AC}{C_bC} \cdot \frac{A^{'}C_c}{A^{'}C_b} \cdot \frac{A^{''}B}{A^{''}C} = 1 \tag{i}$$

Din teorema lui Menelaus în triunghiul AC_bC_c şi transversala $A' - I_3 - I_2$ avem:

$$\frac{A'C_c}{A'C_b} \cdot \frac{I_3A}{I_3C_c} \cdot \frac{I_2C_b}{I_2A} = 1 \tag{ii}$$

Din teorema bisectoarei rezultă: $I_2A = \frac{bc}{a+c}$, $I_3A = \frac{bc}{a+b}$, de unde rezultă

$$I_2C_b = I_2A - C_bA = \frac{(a-c)(p-b)}{a+c}$$

şi

$$I_3C_c = \frac{(a-b)(p-c)}{a+b}. \tag{iii}$$

Din relaţiile (ii) şi (iii) rezultă

$$\frac{A'C_c}{A'C_b} = \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{p-c}{p-b} \tag{iv}$$

Din relaţiile (i) şi (iv) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{A''B}{A''C} &= \frac{c}{b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{(p-b)(a-c)}{(p-c)(a-b)} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)^2}. \end{aligned}$$

Analog, se demonstrează că

$$\frac{B''C}{B''A} = \frac{a}{c} \cdot \frac{(a-b)}{(b-c)} \cdot \frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}$$

şi

$$\frac{C''A}{C''B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(c-b)}{(c-a)} \cdot \frac{(p-c)(p-a)}{(p-b)^2},$$

de unde $\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Atunci, din teorema lui Desargues rezultă că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$sunt omologice.