1.34 PUNCTUL LUI KENMOTU

„Legile naturii sunt doar gândurile matematice ale lui Dumnezeu” - Euclid[44]

Fie pătratele congruente $M_1K_eN_1P_1, M_2N_2P_2K_e, P_3M_3N_3K_e$ aflate în interiorul triunghiului ABC, astfel încât $M_1, M_2 \in (BC)$, $P_2, P_3 \in (AC)$, $N_1N_3 \in (AB)$. Punctul K_e comun pătratelor date se numeşte ***punctul lui Kenmotu*** (Figura 1.119).

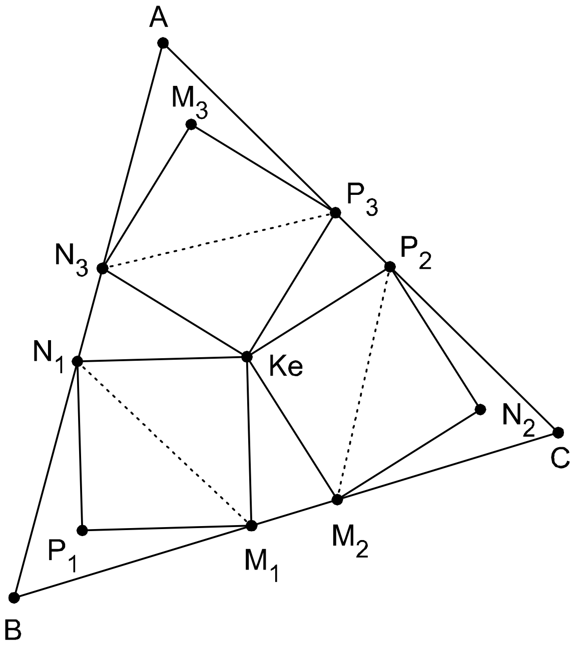

Figura 1.119: Punctul lui Kenmotu

Teorema 512 *Punctele $M_1, M_2, P_2, P_3, N_1, N_3$ sunt conciclice.*

Demonstraţie. Deoarece $K_eM_1 \equiv K_eM_2 \equiv K_eP_2 \equiv K_eP_3 \equiv K_eN_3 \equiv K_eN_1 (= l)$, unde cu l am notat lungimea laturii pătratelor congruente, punctele $M_1, M_2, P_2, P_3, N_1, N_3$ se află pe un cerc cu centrul în punctul K_e şi rază l. □

Teorema 513 *Cercul pe care se află puncteele$M_1, M_2, P_2, P_3, N_1, N_3$ se numeşte* ***cercul lui Kenmotu*** *şi are raza egală cu $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l$.*

Teorema 514 *Diagonalele pătratelor Kenmotu determinate de vârfurile acestora ce aparţin laturilor triunghiului ABC sunt antiparalele cu laturile triunghiului ABC.*

[44]Euclid din Alexandria (330 – 275 î.e.n.) – matematician grec, contribuţii în geometrie

Demonstraţie. Notăm $x = m(\widehat{BM_1P_1}) = m(\widehat{CM_2N_2})$, $y = m(\widehat{AP_3M_3}) = m(\widehat{CP_2N_2})$ şi $z = m(\widehat{AN_3M_3}) = m(\widehat{BN_1P_1})$. Din triunghiul BN_1M_1 rezultă

$$m(\widehat{B}) + (45^\circ + x) + (45^\circ + z) = 180^\circ,$$

de unde $x + z = 90^\circ - m(\widehat{B})$. Analog, $z + y = 90^\circ - m(\widehat{A})$ şi $y + x = 90^\circ - m(\widehat{C})$. Sumând relaţiile precedente rezultă $x + y + z = 45^\circ$ şi de aici se obţin egalităţile:

$$m(\widehat{A}) = 45^\circ + x,\ m(\widehat{B}) = 45^\circ + y,\ m(\widehat{C}) = 45^\circ + z.$$

Atunci, $m(\widehat{AP_3N_3}) = m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{AN_3P_3}) = m(\widehat{C})$, deci dreptele N_3P_3 şi BC sunt antiparalele. Anolog se arată că N_1M_1 şi M_2P_2 sunt antiparalele cu laturile CA, respectiv AB. □

Teorema 515 *Cercul Kenmotu este un cerc Tucker.*

Demonstraţie. Din teorema precedentă şi din faptul că $N_1M_1 \equiv M_2P_2 \equiv N_3P_3$ rezultă concluzia. □

Teorema 516 *Sunt adevărate relaţiile:* $N_1P_2 \parallel BC$, $N_3M_2 \parallel CA$, $P_3M_1 \parallel AB$.

Demonstraţie. Deoarece $N_1M_1 \equiv M_2P_2$ rezultă că patrulaterul $N_1M_1M_2P_2$ este trapez isoscel, deci $N_1P_2 \parallel BC$. Analog se arată $N_3M_2 \parallel CA$ şi $P_3M_1 \parallel AB$. □

Teorema 517 *Patrulaterele* $M_1M_2P_2P_3$, $N_3N_1P_2P_3$ *şi* $M_1M_2N_3N_1$ *sunt inscriptibile.*

Demonstraţie. Deoarece $N_1P_2 \parallel BC$, rezultă $m(\widehat{N_1P_2P_3}) = m(\widehat{C})$ şi cum $m(\widehat{AN_3P_3}) = m(\widehat{C})$, rezultă $m(\widehat{N_1P_2P_3}) = m(\widehat{AN_3P_3})$. Astfel, patrulaterul $N_3N_1P_2P_3$ este inscriptibil. □

Teorema 518 *Punctul lui Kenmotu aparţine dreptei lui Brocard a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece cercul Kenmotu este un cerc Tucker, cum centrul unui cerc Tucker aparţine dreptei lui Brocard (vezi „Cercul lui Tucker"), rezultă concluzia. □

Teorema 519 *Dacă* α, β, γ *sunt centrele pătratelor Kenmotu, atunci triunghiurile* $\alpha\beta\gamma$ *şi ABC sunt omotetice, centrul de omotetie fiind centrul lui Lemoine al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece α, β, γ sunt mijloacele antiparalelor N_1M_1, M_2P_2, N_3P_3, triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi ABC sunt omotetice, centrul de omotetie fiind centrul lui Lemoine al triunghiului ABC (vezi „Cercul lui Taylor"). □