1.36 PUNCTUL LUI COŞNIŢĂ

„Matematica este o ştiinţă în care nu se ştie niciodată despre ce se vorbeşte şi nici dacă este adevărat ce se vorbeşte." – Bertrand Russel[47]

Teorema 542 (***Teorema lui Coşniţă***[48]) *Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC şi X, Y, Z centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, respectiv AOB. Dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.*

Demonstraţie. *Soluţia* 1. Fie $\{A_1\} = AX \cap BC$, $\{B_1\} = BY \cap CA$, $\{C_1\} = CZ \cap AB$ (Figura 1.133). Deoarece

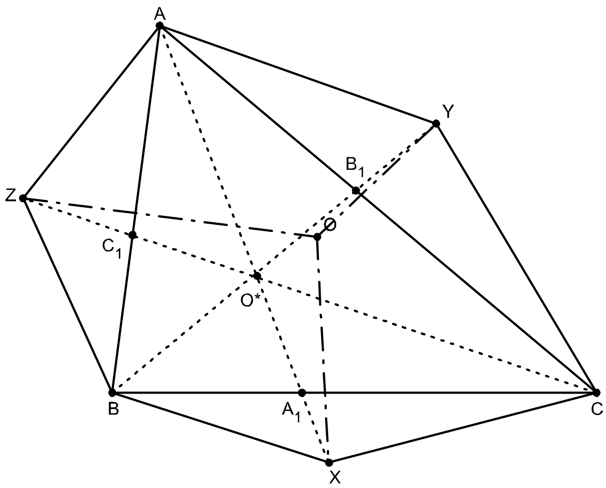

Figura 1.133: Punctul lui Coşniţă

$$m(\sphericalangle BOX) = m(\sphericalangle OCX) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle A),$$

rezultă

$$m(\sphericalangle OBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle BOX) = 90^\circ - m(\sphericalangle A)$$

şi

$$m(\sphericalangle CBX) = m(\sphericalangle BCX) = m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle OBC) = 2m(\sphericalangle A) - 90^\circ = \alpha.$$

Analog, $m(\sphericalangle ACY) = 2m(\sphericalangle B) - 90^\circ = \beta$ şi $m(\sphericalangle AZB) = 2(\sphericalangle C) - 90^\circ = \gamma$. Avem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{A_{[ABX]}}{A_{ACX}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BX \cdot \sin(B+\alpha)}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CX \cdot \sin(C+\alpha)} = \frac{AB\sin(B+\alpha)}{AC\sin(C+\alpha)}$$

[47] Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician şi matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

[48] Cesar Coaşniţă (1910-1962) – matematician roman, profesor la Universitatea din Bucureşti

sau $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \cos(C-A)}{AC \cdot \cos(B-A)}$. Analog, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB \cdot \cos(A-B)}{BA \cdot \cos(C-B)}$ şi $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CA \cdot \cos(B-C)}{CB \cdot \cos(A-C)}$. Atunci, $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$ (unde am ţinut cont că $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$) şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.

Soluţia 2. Fie $\{A^*\} = ZY \cap BC, \{B^*\} = XZ \cap AC$ şi $\{C^*\} = XY \cap AB$. Deoarece ZY, XZ, XY sunt mediatoarele segmentelor AO, BO, respectiv CO din teorema lui Ayme rezultă că punctele A^*, B^*, C^* sunt coliniare şi din reciproca teoremei lui Desargues aplicată triunghiurilor ABC şi XYZ rezultă că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.

Soluţia 3. În [38] găsim o frumoasă demonstraţie a teoremei lui Coşniţă utilizând numerele complexe.

Lema 1. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ puncte în planul complex, iar $M(m)$ punctul de intersecţie dintre dreptele AB şi CD. Atunci afixul punctului M este:

$$m = \frac{(a\bar{b} - \bar{a}b)(d - c) - (c\bar{d} - \bar{c}d)(b - a)}{(\bar{b} - \bar{a})(d - c) - (\bar{d} - \bar{c})(b - a)}$$

Demonstraţia lemei 1. Deoarece punctele A, B şi M sunt coliniare, avem

$$a\bar{b} - \bar{a}b - m(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{m}(b - a) = 0. \tag{i}$$

Cum C, D şi M sunt coliniare, rezultă

$$c\bar{d} - \bar{c}d - m(\bar{d} - \bar{c}) + \bar{m}(d - c) = 0. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă concluzia.

Lema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC, iar a, b, c, o afixele punctelor A, B, C, O în planul complex. Atunci,

$$o = \frac{|a|^2(b - c) + |b|^2(c - a) + |c|^2(a - b)}{\bar{a}(b - c) + \bar{b}(c - a) + \bar{c}(a - b)}.$$

Avem $OA = OB = OC$. Din $OA = OB$ sau $|o - a| = |o - b|$, rezultă

$$(o - a)(\bar{o} - \bar{a}) = (o - b)(\bar{q} - \bar{b}),$$

de unde

$$q(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{q}(a - b) = |a|^2 - |b|^2. \tag{iii}$$

Analog, $OA = OC$ este echivalentă cu $|o - a| = |o - b|$, de unde obţinem

$$q(\bar{a} - \bar{c}) + \bar{q}(a - c) = |a|^2 - |c|^2 \tag{iv}$$

Eliminând $\bar{q}$ din ecuaţiile (iii) şi (iv) obţinem concluzia

Demonstraţia teoremei. Fie $C(O; R)$ cercul circumscris triunghiului ABC. Fără a restrânge generalitatea presupunem că O este originea planului complex. Atunci, $OA = OB = OC = R$ şi $O(0)$. Fie a, b, c, x, y, z afixele punctelor A, B, C, X, Y, Z. Cum $|a| = |b| = |c| = R$, rezultă $\bar{a}a = \bar{b}b = \bar{c}c = R^2$ şi de aici avem

$$\bar{a} = \frac{R^2}{a}, \ \bar{b} = \frac{R^2}{b}, \ \bar{c} = \frac{R^2}{c}.$$

Din Lema 2, obţinem

$$x = \frac{|b|^2 c + |c|^2(-b)}{\bar{b}c + \bar{c}(-b)} = \frac{R^2(c-b)}{R^2(\frac{c}{b} - \frac{b}{c})} = \frac{bc}{b+c},$$

şi

$$\overline{x} = \frac{R^2}{b+c}.$$

Analog,

$$\begin{aligned} y &= \frac{ac}{a+c}, \overline{y} = \frac{R^2}{a+c} \\ z &= \frac{ab}{a+b}, \overline{z} = \frac{R^2}{a+b}. \end{aligned}$$

Fie $\{M\} = AX \cap BY$, iar m afixul lui M. Din Lema 1, avem

$$\begin{aligned} m &= \frac{(a\bar{x} - \bar{a}x)(y-b) - (b\bar{y} - \bar{b}q_2)(x-a)}{(\bar{x} - \bar{a})(y-b) - (\bar{y} - \bar{b})(x-a)} \\ &= \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a+b+c)(ab+ac+bc) - 4abc} \end{aligned} \tag{v}$$

Fie $\{N\} = AX \cap CZ$, iar n afixul lui N. Din Lema 1, avem

$$\begin{aligned} n &= \frac{(a\bar{x} - \bar{a}x)(z-c) - (c\bar{z} - \bar{c}z)(x-a)}{(\bar{x} - \bar{a})(z-c) - (\bar{z} - \bar{c})(x-a)} \\ &= \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a+b+c)(ab+ac+bc) - 4abc} \end{aligned} \tag{vi}$$

Analog, dacă $\{P\} = BY \cap CZ$, iar p afixul lui P, obţinem

$$p = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a+b+c)(ab+ac+bc) - 4abc},$$

deci, $m = n = p$, adică $M = N = P$. □

Observaţia 543 *Afixul punctului lui Coşniţă când centrul cercului circumscris triunghiului este în originea planului complex este:*

$$o^* = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a+b+c)(ab+ac+bc) - 4abc}.$$

Observaţia 544

i) Punctul de concurenţă al dreptelor AX, BY şi CZ se numeşte ***punctul lui Cosniţă*** (în literatura internaţională se scrie Kosnitza - probabil datorită accentului uzat în limba română) al triunghiului ABC.

ii) Triunghiul XYZ se numeşte ***triunghiul lui Cosniţă*** al triunghiului ABC.

iii) AX, BY, CZ se numesc ***dreptele lui Cosniţă.***

iv) În cartea lui Kimberling - Encyclopedia of Triangle Centers - punctul lui Coşniţă este centrul $X(54)$.

Teorema 545 *Într-un triunghi ABC, punctul lui Coşniţă (O^*) şi centrul cercului lui Euler (O_9) sunt izogonal conjugate.*

Demonstraţie. Fie A' şi A'' punctele de intersecţie dintre bisectoarele interioară şi exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ cu cercul circumscris triunghiului ABC şi O_a centrul cercului circumscris triunghiului BHC. Punctele A, O_9, O_a sunt coliniare (vezi „Cercurile

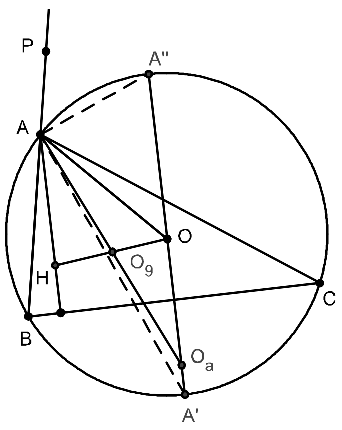

Figura 1.134: Puncte izogonale

lui Carnot") (Figura 1.134). Avem: $OX = \frac{R}{2\cos A}, XA' = XO - R, OO_a = AH = 2R\cos A$ (vezi „Cercurile lui Carnot"). Atunci,

$$\frac{A''O_a}{A''X} = \frac{A'O_a}{A'X} = 2R\cos A,$$

deci fasciculul (A, NO_aMO_1) este armonic şi cum $m(\sphericalangle A'AA'') = 90°$ rezultă că dreptele AA' şi AA'' sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle XAO_a$, respectiv $\sphericalangle O_aAP$, unde $P \in (BA\backslash[AB])$ (vezi „Centrul cercului înscris în triunghi"), deci $\sphericalangle XAA' \equiv \sphericalangle A'AO_a$ sau $\sphericalangle XAA' \equiv \sphericalangle A'AO_9$, adică dreptele AX şi AO_9 sunt izogonale. Analog se arată că dreptele BY şi BO_9 sunt izogonale, deci punctele lui Coşniţă (O^*) şi centrul cercului lui Euler (O_9) sunt izogonal conjugate. □

Teorema 546 *Raza cercului circumscris triunghiului BOC are raza egală cu $\frac{R}{2\cos A}$.*

Demonstraţie. Avem:

$$XO = \frac{R \cdot R \cdot a}{4 \cdot A_{[BOC]}} = \frac{R^2 \cdot a}{4 \cdot \frac{R^2 \cdot \sin 2A}{2}} = \frac{a}{2\sin 2A} = \frac{R}{2\cos A}.$$

□

Teorema 547 *Fie A^*, B^*, C^* simetricele vârfurilor triunghiului ABC faţă de laturile opuse şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiurilor AOA^*, BOB^* şi COC^* se întâlnesc într-un al doilea punct care este inversul în cercul circumscris al punctului lui Coşniţă.*

Demonstraţie. Vezi [12, § II.24]. □

Teorema 548 (***Teorema lui Yiu***) *Fie A^*, B^*, C^* simetricele vârfurilor triunghiului ABC faţă de laturile opuse. Cercurile circumscrise triunghiurilor $AB^*C^*, BC^*A^*, CA^*B^*$ trec prin inversul punctului lui Coşniţă în cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie Q inversul punctului lui Coşniţă (O^*) în cercul circumscris triunghiului ABC. Din teorema lui Musselman Q aparţine cercurilor circumscrise tri-

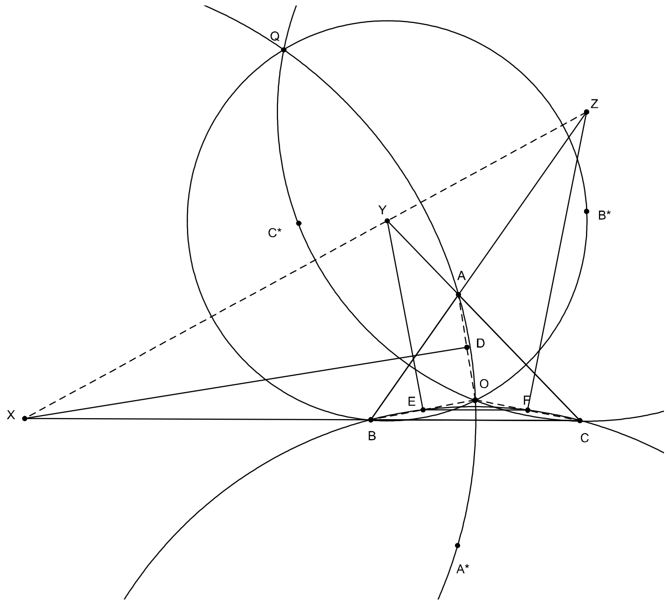

Figura 1.135: Teorema lui Yiu

unghiurilor BOB^* şi COC^* (Figura 1.135). Atunci, $\sphericalangle B^*QO \equiv \sphericalangle B^*BO$ şi $\sphericalangle C^*QO \equiv \sphericalangle C^*CO$, de unde rezultă că

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B^*QC^*) &= m(\sphericalangle BQO) + m(\sphericalangle C^*QO) \\ &= m(\sphericalangle B^*BO) + m(\sphericalangle C^*CO) \\ &= [m(\sphericalangle CBB^*) - m(\sphericalangle CBO)] + [m(\sphericalangle BCC^*) - m(\sphericalangle BCO)] \\ &= [m(\sphericalangle CBB^*) - m(\sphericalangle CBO)] + [m(\sphericalangle BCC^*) - m(\sphericalangle BCO)] \\ &= [m(\sphericalangle CBB^*) + m(\sphericalangle BCC^*)] - [m(\sphericalangle CBO) + m(\sphericalangle BCO)] \\ &= m(\sphericalangle CBB^*) + m(\sphericalangle BCC^*) - (180^\circ - m(\sphericalangle BOC)). \end{aligned}$$

Dar $m(\sphericalangle CBB^*) = 90^\circ - m(\sphericalangle C) = 90^\circ - m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC)$. Astfel,

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B^*QC^*) &= (90^\circ - m(\sphericalangle C)) + (90^\circ - m(\sphericalangle B)) - 180^\circ - 2m(\sphericalangle A) \\ &= 2m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C) = 3m(\sphericalangle A) - 180^\circ. \end{aligned}$$

Deci, $180^\circ - m(\sphericalangle B^*QC^*) = 2 \cdot 180^\circ - 3m(\sphericalangle A)$. Pe de altă parte, $\sphericalangle BAC^* \equiv \sphericalangle BAC$

şi $\sphericalangle CAB^* \equiv \sphericalangle BAC$, de unde rezultă că

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B^*AC^*) &= 2\cdot 180^\circ - [m(\sphericalangle BAC^*) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAB^*)] \\ &= 2\cdot 180^\circ - 3m(\sphericalangle BAC) \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle B^*QC^*), \end{aligned}$$

adică Q aparţine cercului circumscris triunghiului AB^*C^*. Analog, se arată că punctul Q aparţine şi cercurilor circumscrise triunghiurilor BC^*A^* şi CA^*B^*. □

Observaţia 549 *În general, dat fiind un triunghi ABC şi punctele A^*, B^*, C^* astfel încât cercurile circumscrise triunghiurilor A^*BC, B^*CA şi C^*AB au un punct comun, atunci cercurile circumscrise triunghiurilor AB^*C^*, BC^*A^* şi CA^*B^* au de asemenea un punct comun.*

Teorema 550 *Centrul cercului circumscris triunghiului de simetrie $A^*B^*C^*$ al triunghiului ABC este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului ABC faţă de punctul lui Coşniţă.*

Demonstraţie. Centrul cercului circumscris triunghiului podar al unui punct P este mijlocul segmentului PP^* (P^* fiind izogonalul conjugat al lui P). Fie O^* centrul cercului circumscris triunghiului $A^*B^*C^*$ (Figura 1.136). Cum O_9 şi N^* sunt izogonal

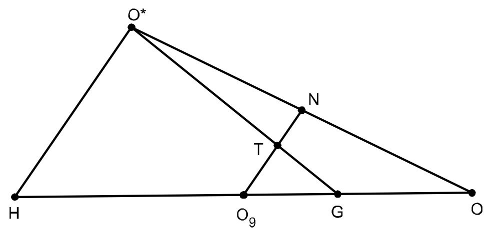

Figura 1.136: N^* este mijlocul segmentului OO^*

conjugate rezultă că O^* este imaginea mijlocului segmentului O_9N^* prin omotetie $H(G, 4)$ (unde am folosit teorema lui Boutte – „Triunghiul celor trei imagini”). Fie T mijlocul segmentului O_9N^*. Din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului O_9TG avem:

$$\frac{O^*G}{O^*T}\cdot\frac{OO_9}{OG}\cdot\frac{N^*T}{O_9N^*} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

rezultă punctele O, N^*şi O^* sunt coliniare. Cum $\frac{O^*T}{TG} = \frac{HO_9}{O_9G} = 3$ rezultă $O_9T \parallel O^*H$, adică $O_9N^* \parallel O^*H$, deci N^* este mijlocul segmentului OO^*. □