1.2 CENTRUL CERCULUI CIRCUMSCRIS UNUI TRIUNGHI

„Matematicile pun în joc puteri sufleteşti care nu sunt cu mult diferite de cele solicitate de poezie şi arte.” – Ion Barbu[2]

Punctul de intersecţie al mediatoarelor laturilor unui triunghi ABC se numeşte ***centrul cercului circumscris*** triunghiului ABC. Raza acestui cerc se numeşte ***raza cercului circumscris*** triunghiului ABC. În cele ce urmează, vom nota cu O şi R centrul cercului circumscris, respectiv raza cercului circumscris triunghiului ABC.

i) Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic se află în interiorul triunghiului (Figura 1.4).

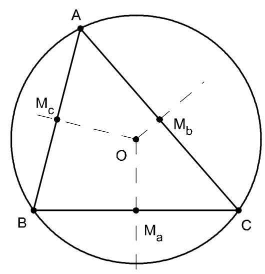

Figura 1.4: $O \in Int(\Delta ABC)$

ii) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic se află la mijlocul ipotenuzei. Raza acestui cerc are lungimea jumătate din lungimea ipotenuzei (Figura 1.5).

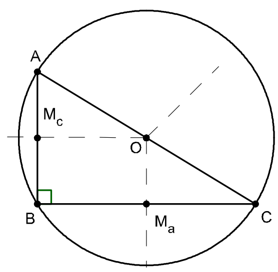

Figura 1.5: $O \in AC$

iii) Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află în exteriorul triunghiului (Figura 1.6).

[2] Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din Bucureşti, contribuţii în algebră şi geometrie

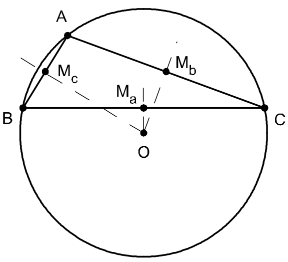

Figura 1.6: $O \in Ext(\Delta ABC)$

Observaţia 18 *Triunghiul podar al centrului cercului circumscris unui triunghi ABC este triunghiul median al acestuia.*

Teorema 19 *Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci,*

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C} \text{ şi } \frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}.$$

Demonstraţie. Avem: $m(\sphericalangle BAA') = m(\sphericalangle BAO) = \frac{1}{2}[180^\circ - 2m(\sphericalangle C)] = 90^\circ -$

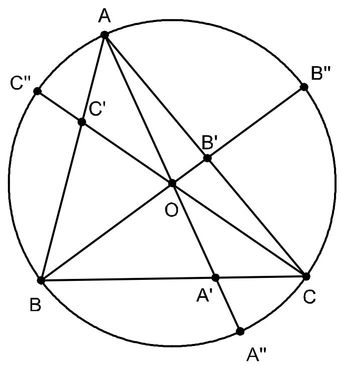

Figura 1.7: Triunghiul pedal al lui O

$m(\sphericalangle C)$ şi $m(\sphericalangle CAA') = m(\sphericalangle CAO) = 90^\circ - m(\sphericalangle B)$ (Figura 1.7). □

Teorema 20 *Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci,*

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}, \frac{BO}{OB'} = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{\sin 2B}, \frac{CO}{OC'} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}.$$

Demonstraţie. Din teorema lui Van-Aubel rezultă:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}.$$

Analog se arată şi celelalte egalităţi. □

Teorema 21 *Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Pentru orice punct M din planul triunghiului este adevărată egalitatea:*

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

Demonstraţie. Din $\frac{AO}{OA'} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}$ rezultă

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\overrightarrow{MA} + \frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A} \cdot \overrightarrow{MA'}}{1 + \frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}}, \qquad \text{(i)}$$

iar din $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$, rezultă

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{\overrightarrow{MB} + \frac{\sin 2C}{\sin 2B} \cdot \overrightarrow{MC}}{1 + \frac{\sin 2C}{\sin 2B}} = \frac{\sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC}}{\sin 2B + \sin 2C}. \qquad \text{(ii)}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă concluzia. □

Observaţia 22 *Ţinând cont de identitatea*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R^2},$$

unde S reprezintă aria triunghiului ABC, egalitatea demonstrată anterior devine:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{R^2}{2S}(\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC}).$$

i) Dacă $M \equiv O$ obţinem:

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

ii) Dacă $M \equiv G$ obţinem:

$$\overrightarrow{GO} = \frac{\sin 2A \cdot \overrightarrow{GA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{GB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{GC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

iii) Dacă $M \equiv A$ obţinem

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\sin 2B \cdot \overrightarrow{AB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{AC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

Teorema 23 *Coordonatele baricentrice absolute ale centrului cercului circumscris unui triunghi ABC sunt:*

$$O\left(\frac{R^2}{2S}\sin 2A, \frac{R^2}{2S}\sin 2B, \frac{R^2}{2S}\sin 2C\right).$$

Demonstraţie. Din teorema 21 rezultă concluzia. □

Teorema 24 *Fie z_A, z_B, z_C afixele vârfurilor unui triunghi ABC. Afixul centrului cercului circumscris triunghiului ABC este egal cu*

$$z_O = \frac{\sin 2A \cdot z_A + \sin 2B \cdot z_B + \sin 2C \cdot z_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

Demonstraţie. Din teorema 21 rezultă concluzia. □

Teorema 25 *Coordonatele unghiulare ale centrului cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC sunt egale cu:*

$$m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{A}), m(\widehat{COA}) = 2m(\widehat{B}) \text{ şi } m(\widehat{AOB}) = 2m(\widehat{C}).$$

Demonstraţie. Soluţia este evidentă deoarece – de exemplu – $\widehat{BOC}$ este unghi la centru, deci are măsura egală cu măsura arcului BC. □

Teorema 26 *Raza cercului circumscris unui triunghi oarecare este egală cu $R = \frac{abc}{4S}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului şi S este aria acestuia.*

Demonstraţie. Vezi [12, § II.61]. □

Teorema 27 *Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral de latură l este $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.*

Teorema 28 *Distanţele de la centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC la laturile triunghiului sunt egale cu $\frac{a}{2} \cdot ctgA$, $\frac{b}{2} \cdot ctgB$, $\frac{c}{2} \cdot ctgC$.*

Demonstraţie. Avem $OM_a = R\cos A = \frac{a}{2\sin A}\cos A = \frac{a}{2} \cdot ctgA$.Analog, $OM_b = \frac{b}{2} \cdot ctgB$ şi $OM_c = \frac{c}{2} \cdot ctgC$. □

Teorema 29 *Centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul unui triunghi ABC sunt puncte coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler”. □

Consecinţa 30 *$OH = 3OG = OL$ şi $HG = 2OG$ (vezi „Dreapta lui Euler”şi „Punctul lui Longchamps (L)”).*

Teorema 31 *Dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, atunci*

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.10]. □

Teorema 32 *Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci*

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.10]. □

Teorema 33 *Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci*

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

Demonstraţie. Puterea punctului H faţă de cercul circumscris triunghiului ABC este egală cu: $P_H^2 = AH \cdot 2HH_a = R^2 - OH^2$ sau $2R\cos A \cdot 4R\cos B\cos C = R^2 - OH^2$, $8R^2\cos A\cos B\cos C = R^2 - OH^2$, de unde rezultă concluzia. □

Consecinţa 34 *Este adevărată relaţia:* $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A\cos B\cos C)$.

Demonstraţie. Din teoremele 32 şi 33 rezultă concluzia. □

Teorema 35 *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Demonstraţie. Vezi „Centrul cercului înscris”. □

Teorema 36 *Dacă I_a este centrul cercului $A-$ exînscris în triunghiul ABC, atunci*

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Demonstraţie. Vezi „Cercuri exînscrise”. □

Teorema 37 *Dacă K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC, atunci*

$$OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Demonstraţie. Pentru $M \equiv O$, egalitatea

$$MK^2 = \frac{a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

(vezi „Teorema lui Van-Aubel”), devine $OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$. □

Teorema 38 *Într-un triunghi ABC, distanţa de la punctul lui Nagel (N) la centrul cercului circumscris (O) este egală cu diferenţa dintre raza acestui cerc şi diametrul cercului înscris ($ON = R - 2r$).*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 39 *Pentru un triunghi ABC, fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul său, I centrul cercului înscris triunghiului, N punctul lui Nagel al triunghiului ABC. Segmentele HI şi ON sunt congruente.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 40 *Centrul cercului circumscris şi ortocentrul unui triunghi sunt puncte izogonal conjugate.*

Demonstraţie. Vezi „Drepte izogonale”. □

Teorema 41 (***Relaţia lui Sylvester***) *Într-un triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\ .$$

Demonstraţie. Vezi „Centrul de greutate al unui triunghi”. □