1.40 PUNCT CICLOCEVIAN

„O demonstraţie matematică nu înseamnă o simplă alăturare de silogisme, ci silogisme aşezate într-o anumită ordine, iar ordinea în care sunt aşezate aceste elemente este mai importantă decât elementele însăşi.” - Henri Poincaré[51]

În triunghiul ABC, fie cevienele AA', BB', CC' şi P punctul lor de concurenţă. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează fiecare latură în două puncte (nu neapărat distincte): $A', A''; B', B''$şi C', C'' (Figura 1.142).

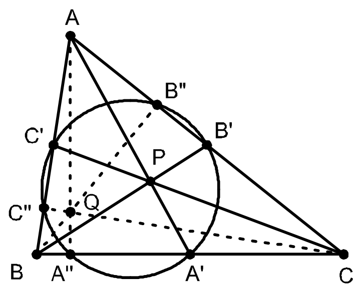

Figura 1.142: Punct ciclocevian

Teorema 571 *Dreptele AA'', BB'' şi CC'' sunt concurente.*

Demonstraţie. Din teorema lui Carnot rezultă

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,$$

adică

$$\left(\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}\right)\cdot\left(\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}\right)=1 \tag{i}$$

Deoarece AA', BB', CC' sunt concurente, din teorema lui Ceva rezultă

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA'', BB'' şi CC'' sunt concurente. □

Observaţia 572 *Punctul Q de concurenţă al dreptelor AA'', BB''şi CC'' se numeşte* ***ciclocevianul*** *punctului P. Triunghiul $A''B''C''$ se numeşte* ***triunghiul ciclocevian*** *al triunghiului ABC, corespunzător punctului P.*

[51] Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician şi fizician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

Teorema 573 *Ortocentrul H şi centrul de greutate G al unui triunghi sunt puncte cicloceviene.*

Demonstraţie. Picioarele înălţimilor H_a, H_b, H_c şi mijloacele laturilor M_a, M_b, M_c aparţin cercului lui Euler al triunghiului ABC (vezi „Cercul lui Euler"). □

Observaţia 574 *Triunghiul median este triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC corespunzător ortocentrului triunghiului ABC. Triunghiul ortic este triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate al triunghiului ABC.*

Teorema 575 *Punctul lui Gergonne Γ al triunghiului ABC este propriul său punct ciclocevian.*

Demonstraţie. Deoarece cercul circumscris triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ este tangent laturilor triunghiului ABC rezultă concluzia. □

Observaţia 576 *Triunghiul ciclocevian corespunzător punctului lui Gergonne este triunghiul de contact al triunghiului ABC.*