Capitolul 2

DREPTE REMARCABILE ASOCIATE UNUI TRIUNGHI

2.1 DREAPTA LUI EULER

„Citiţi pe Euler! Citiţi pe Euler, el este Maestrul nostru, al tuturor." - P. S. Laplace[1]

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar H ortocentrul acestuia. Dreapta OH se numeşte ***dreapta lui Euler***[2] a triunghiului ABC.

Teorema 577 *Centrul de greutate G al triunghiului ABC se află pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC şi $GH = 2OG$.*

Demonstraţie. Fie $\{G_1\} = AM_a \cap HO$ (Figura 2.1). Din asemănarea triunghiurilor AHG_1 şi M_aOG_1 avem:

$$\frac{AG_1}{G_1M_a} = \frac{AH}{OM_a} = \frac{HG_1}{G_1O} \tag{i}$$

Fie $\{A''\} = AO \cap \wp(ABC)$. Avem $m(\sphericalangle A''CA) = 90°$, deci $A''C \perp CA$, dar $BH \perp AC$ de unde $BH \parallel A''C$. Analog, $CH \parallel A''B$, deci patrulaterul $BHA''C$ este paralelogram, deci punctele H, M_a şi A'' sunt coliniare. Din asemănarea triunghiurilor OM_aA'' şi AHA'' rezultă

$$\frac{AH}{OM_a} = \frac{AA''}{OA''} = \frac{2R}{R} = 2 \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{AG_1}{G_aM_a} = \frac{HG_1}{G_1O} = 2$, sau $AG_1 = 2G_1M_a$, adică G_1 este centrul de greutate G al triunghiului ABC şi $HG = 2GO$ (unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC). □

Observaţia 578 *Din aplicaţia precedentă rezultă $12GO_9 = 6GO = 4OO_9 = 3HO$.*

---

[1] P. S. Laplace (1749-1827) – matematician şi astronom francez, contribuţii în algebră şi analiză

[2] Leonhard Euler (1707-1783) – matematician elveţian, profesor la Universitatea din Petesburg, contribuţii fundamentale în toate ramurile matematicii

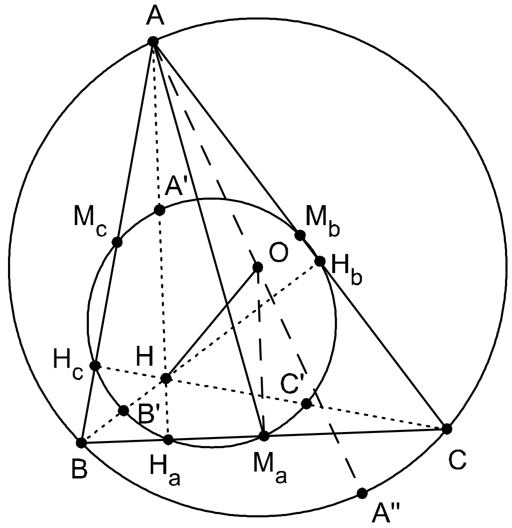

Figura 2.1: Dreapta lui Euler

Teorema 579 *Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dreptele lui Euler ale triunghiurilor ABC, BHC, CHA şi AHB sunt concurente.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiurile ABC, AHC, AHB şi BHC au acelaşi cerc medial (Vezi "Cercul lui Euler"), atunci dreptele lui Euler ale acestor triunghiuri trec prin punctul O_9 (centrul cercului lui Euler). □

Teorema 580 *Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci dreptele ce unesc mijloacele segmentelor OA, OB, OC cu M_a, M_b, M_c– mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB - sunt dreptele lui Euler ale triunghiurilor M_bOM_c, M_cOM_a, respectiv M_aOM_b.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor AO, BO, respectiv CO. Punctul A' este centrul cercului circumscris triunghiului M_bOM_c, iar punctul M_a este ortocentrul triunghiului M_bOM_c, deci $A'M_a$ este dreapta lui Euler a triunghiului M_bOM_c. Analog, $B'M_b$ şi $C'M_c$ sunt dreptele lui Euler ale triunghiurilor M_cOM_a, respectiv M_aOM_b. □

Observaţia 581 *Mijlocul segmentului OH se numeşte* ***centrul cercului lui Euler*** *al triunghiului ABC şi aparţine dreptei lui Euler a triunghiului ABC (vezi „Cercul lui Euler”).*

Observaţia 582 *Dreptele $A'M_a$, $B'M_b$ şi $C'M_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului median, deoarece dreptele lui Euler ale unui patrupunct ortocentric (patru puncte în care fiecare punct este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei puncte) sunt concurente, punctul de concurenţă fiind centrul cercului lui Euler al triunghiului $M_aM_bM_c$.*

Teorema 583 *Triunghiul ABC şi triunghiul lui Carnot au acelaşi cerc al lui Euler şi aceeaşi dreaptă a lui Euler.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.38]. □

Teorema 584 *Dreptele lui Euler ale celor patru triunghiuri ale unui patrupunct ortocentric sunt concurente.*

Demonstraţie. Din faptul că cele patru triunghiuri considerate au acelaşi cerc al lui Euler (Vezi "Cercul lui Euler"), dreptele lui Euler ale lor sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului dat. □

Teorema 585 *Fie triunghiul ABC, triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ al său şi triunghiurile extangentice $D_aD_bD_c$, $E_aE_bE_c$ şi $F_aF_bF_c$. Dreptele lui Euler ale celor cinci triunghiuri sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi R raza acestuia, I_a centrul cercului exînscris corespunzător punctului A, iar r_a raza acestui cerc, H_1 ortocentrul triunghiului $D_aD_bD_c$ şi O_9^1 centrul cercului lui Euler al triun - ghiului $D_aD_bD_c$ (Figura 2.2). Fie $A_1A_2A_3$ triunghiul ortic al triunghiului $D_aD_bD_c$ în

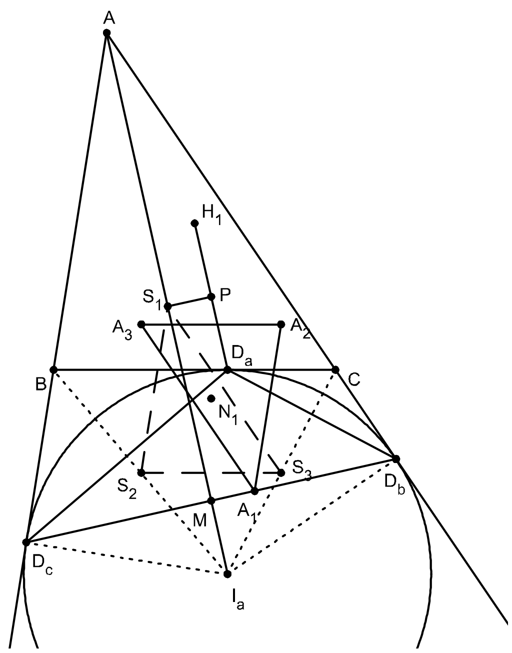

Figura 2.2: Triunghiuri extangentice

care cercul său circumscris este cercul lui Euler al triunghiului $D_aD_bD_c$, de rază $\frac{r_a}{2}$ şi de centru N_1. Fie $S_1S_2S_3$ triunghiul simetric triunghiului $A_1A_2A_3$ faţă de punctul N_1. Evident triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $S_1S_2S_3$ sunt congruente şi cercul circumscris triunghiului $S_1S_2S_3$ este tot cercul lui Euler al triunghiului $D_aD_bD_c$.

Fie M mijlocul laturii D_bD_c, P mijlocul segmentului H_1D_a. Punctele P, S_1, A_1 şi M aparţin cercului lui Euler al triunghiului $D_aD_bD_c$, iar patrulaterul PS_1MA_1 este dreptunghi având centrul în punctul N_1. Deoarece $PA_1 \perp D_cD_b$ şi $PA_1 \parallel S_1M$, rezultă S_1M este mediatoarea segmentului D_bD_c, deci punctul S_1 aparţine bisectoarei interioare a unghiului A.

Analog, punctele S_2 şi S_3 aparţin bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B, respectiv C ($S_2 \in BI_a$ şi $S_3 \in CI_a$). Deoarece $D_bI_a \perp CA$ şi $A_1A_3 \perp D_bI_a$ (deoarece A_1A_3 este antiparalela laturii D_aD_c). Atunci $A_1A_3 \parallel AC$. Dar $S_1S_3 \parallel A_1A_3$ datorită faptului că dreptele sunt simetrice faţă de N_1, deci $S_1S_3 \parallel AC$.

Analog, $S_1S_2 \parallel AB$ şi $S_2S_3 \parallel BC$, deci triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi ABC sunt omotetice, prin omotetia de centru I_a şi rază $2R/r_a$ (deoarece omotetia transformă triunghiul $S_1S_2S_3$ cu raza cercului circumscris $r_a/2$ în ABC cu raza cercului circumscris R). Prin această omotetie centrul cercului lui Euler al triunghiului $D_aD_bD_c$ - adică punctul N_1 - se transformă în O, deci punctele I_a, N_1 şi O sunt coliniare, adică dreapta lui Euler a triunghiului $D_aD_bD_c$ trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Analog, se arată că şi dreptele lui Euler ale celorlalte patru triunghiuri trec prin O.□

Teorema 586 *Într-un triunghi ABC cevienele concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului sunt dreptele lui Euler ale triunghiurilor extangentice ale triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ortic al triunghiului ABC, iar centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC este centrul cercului circumscris al triunghiului ortic, teorema este o consecinţă a teoremei precedente. □

Teorema 587 *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci dreptele lui Euler ale triunghiurilor BCI, CAI, ABI şi ABC sunt concurente.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Schiffler”. □

Teorema 588 *Fie H ortocentrul unui triunghi ABC şi $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al acestuia. Paralelele duse prin H la dreptele H_cH_b, H_cH_a şi H_aH_b intersectează dreptele BC, CA, respectiv AB în D, E, F, iar paralelele duse prin H la BC, CA, AB intersectează dreptele H_cH_b, H_cH_a şi H_aH_b în D', E', respectiv F'. Punctele în D, E, F şi în D', E', F' aparţin unor drepte perpendiculare pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.1]. □

Teorema 589 *Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median şi $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al unui triunghi neisoscel şi nedreptunghic ABC, iar $\{X\} = H_bM_c \cap H_cM_b$, $\{Y\} = H_aM_c \cap H_cM_a$, $\{Z\} = H_aM_b \cap H_bM_a$. Punctele X, Y, Z aparţin dreptei lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din teorema lui Pappus aplicată punctelor coliniare B, H_c, M_c, respectiv C, M_b, H_b, rezultă că punctele $\{H\} = BH_b \cap CH_c$, $\{G\} = BH_b \cap CM_c$ şi $\{X\} = H_cM_b \cap H_bM_c$ sunt coliniare. Analog se arată că punctele Y şi Z aparţin dreptei HG. □

Teorema 590 *Simetricele dreptei lui Euler a unui triunghi ABC în raport cu laturile triunghiului ABC sunt concurente într-un punct ce aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie E_1, E_2, E_3 punctele de intersecţie dintre dreapta lui Euler a triunghiului ABC şi dreptele BC, CA, respectiv AB (Figura 2.3). Simetricele ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de laturile triunghiului sunt punctele A_h, B_h, C_h de intersecţie a înălţimilor AH, BH, CH cu cercul circumscris (vezi [12, § I.4]). Demonstrăm că dreptele A_hE_1, B_hE_2, C_hE_3 sunt concurente. Centrele cercurilor Carnot (O_a, O_b, O_c) aparţin dreptelor A_hE_1, B_hE_2, C_hE_3. Deoarece triunghiurile $A_hB_hC_h$ şi $O_aO_bO_c$ sunt omologice, centrul de omologie aparţinând cercului circumscris triunghiului ABC (vezi [12, § III.38]), rezultă concluzia. □

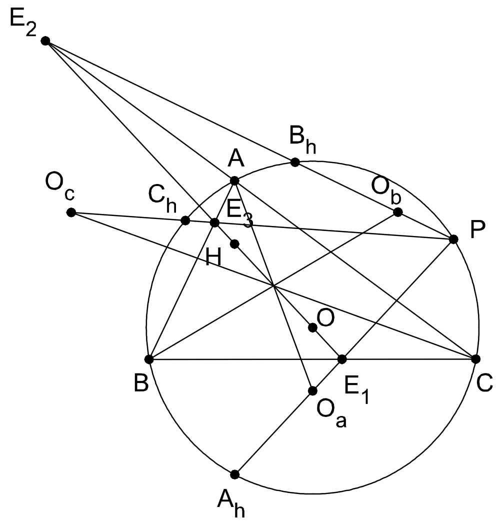

Figura 2.3: Simetrice ale dreptei lui Euler

Teorema 591 *Simetricele dreptei lui Euler a unui triunghi ABC în raport cu laturile triunghiului având vârfurile în punctele euleriene ale triunghiului ABC sunt concurente într-un punct ce aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH. Punctul H este şi ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, iar centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ este O_9 (centrul cercului lui Euler), deci dreapta lui Euler a triunghiului $A'B'C'$ este HO_9, adică tocmai dreapta lui Euler a triunghiului ABC. Conform proprietăţii precedente rezultă că simetricele dreptei lui Euler triunghiului $A'B'C'$ în raport cu laturile acestuia sunt concurente într-un punct ce aparţine cercului lui Euler al triunghiului $A'B'C'$, adică cercul lui Euler al triunghiului ABC. □

Teorema 592 *Dreapta lui Euler a unui triunghi ABC este perpendiculară pe axa de omologie dintre triunghiul tangenţial şi triunghiul median al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.8]. □

Teorema 593 *Fie* $M_aM_bM_c$ *triunghiul median corespunzător unui triunghi* ABC *şi* O *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC. *Pe dreptele* OM_a,OM_b,OM_c *se consideră punctele* A_1,B_1,C_1 *astfel încât* $\frac{OA_1}{OM_a} = \frac{OB_1}{OM_b} = \frac{OC_1}{OM_c}$. *Dreptele* AA_1,BB_1,CC_1 *sunt concurente într-un punct ce aparţine dreptei lui Euler a triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi [12, § II.47]. □

Teorema 594 *Dacă centrul cercului înscris* (I) *al unui triunghi* ABC *aparţine dreptei lui Euler a triunghiului, atunci triunghiul* ABC *este isoscel.*

Demonstraţie. Presupunem că triunghiul ABC nu este isoscel şi fie A', B' punctele de intersecţie al bisectoarelor AI, BI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci,

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OA'}{AH}, \frac{OI}{IH} = \frac{OB'}{BH}$$

şi cum $OA' \equiv OB'(= R)$ rezultă $AH \equiv BH$, adică $AC \equiv BC$, contradicţie. □

Teorema 595 *Fie* $C_aC_bC_c$ *triunghiul de contact al unui triunghi* ABC. *Dreapta lui Euler a triunghiului* $C_aC_bC_c$ *trece prin centrul cercului lui Euler al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie H_1 ortocentrul triunghiului de contact şi C_aA_1, C_bB_1, C_cC_1 înălţimile triunghiului de contact (Figura 2.4). Atunci, dreapta lui Euler a triunghiului

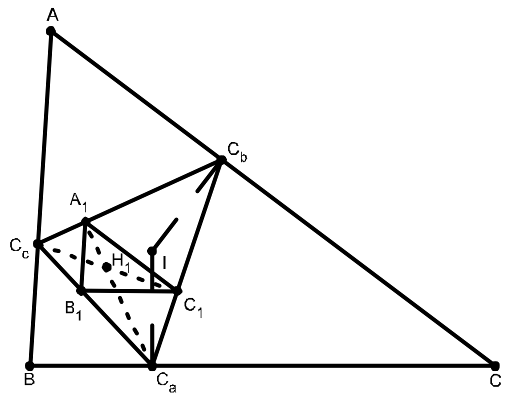

Figura 2.4: Dreapta lui Euler a triunghiului $C_aC_bC_c$

$C_aC_bC_c$ este dreapta IH_1, iar H_1 este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$ (vezi [12, § III.1]). Deoarece triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt omotetice (vezi [12, § III.3]), rezultă că prin această omotetie punctele H_1 şi I se corespund şi totodată centrele cercurilor lui Euler ale celor două triunghiuri, deci centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC aparţine dreptei IH_1. □