2.2 DREAPTA LUI NEWTON - GAUSS

„Cel mai frumos lucru pe care-l putem experimenta este misterul...este sursa tuturor adevărurilor şi ştiinţei” – Albert Einstein[3]

Teorema 596 (***Teorema lui Gauss***[4]) *Fie triunghiul ABC. O dreaptă d intersectează dreptele BC, CA, AB în punctele $A' \in [BC$, $B' \in [CA]$, $A' \in [AB]$. Mijloacele segmentelor AA', BB' şi CC' sunt coliniare.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie A'', B'', C' mijloacele segmentelor AA', BB' respectiv CC' şi M_a, M_b, M_c mijloacele segmentelor BC, CA, respectiv AB (Figura 2.5). Din

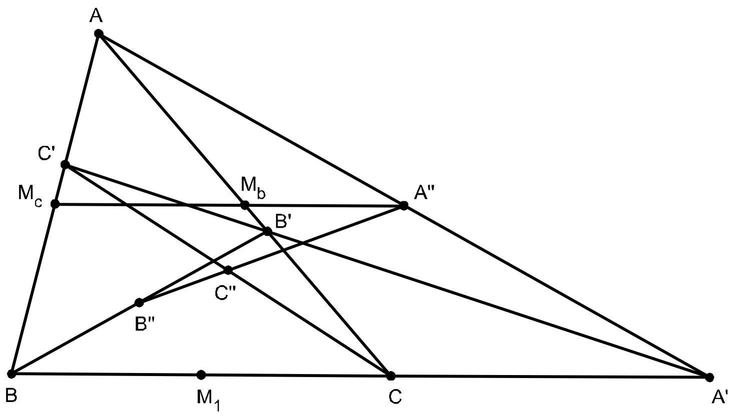

Figura 2.5: Dreapta lui Newton-Gauss

teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC şi transversala $A' - B' - C'$ rezultă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

relaţie care este echivalentă cu

$$\frac{A'B/2}{A'C/2} \cdot \frac{B'C/2}{B'A/2} \cdot \frac{C'A/2}{C'B/2} = 1,$$

adică

$$\frac{A''M_c}{A''M_b} \cdot \frac{B''M_a}{B''M_c} \cdot \frac{C''M_b}{C''M_a} = 1,$$

(deoarece punctele $A'', M_b, M_c; B'', M_c, M_a$, respectiv C'', M_a, M_b sunt coliniare) şi din reciproca teoremei lui Menelaus pentru triunghiul $M_aM_bM_c$ şi punctele $A'' \in$

[3]Albert Einstein (1879-1955) – fizician german, profesor universitar la Berlin şi Princeton, laureat al Premiului Nobel

[4]Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – matematician german, profesor la Universitatea Göttingen, contribuţii majore în toate ramurile matematicii

$[M_cM_b\backslash[M_cM_b]$, $B'' \in [M_aM_b]$, $C'' \in [M_bM_a]$ rezultă că punctele A'', B'', C'' sunt coliniare.

Soluţia 2. Notând $\frac{BA'}{BC} = p$ şi $\frac{BA}{BC'} = q, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{v}$, atunci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA'} &= p\overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{BA} = q\overrightarrow{v}, \\ \overrightarrow{BC''} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}), \\ \overrightarrow{BA''} &= \frac{1}{2}(p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Notând $\frac{B'A'}{B'C'} = r$, $\frac{B'C}{B'A} = t$, avem

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{p\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v}}{1+r} = \frac{tq\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}}{1+t},$$

de unde rezultă că

$$\frac{p}{1+r} = \frac{1}{1+t}, \quad \frac{r}{1+r} = \frac{tq}{1+t}.$$

Obţinem $t = \frac{r}{pq}$ şi $r = \frac{q(p-1)}{q-1}$, înlocuind în $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BB''}$ obţinem:

$$\overrightarrow{BB''} = \frac{1}{2(pq-1)}\left[(p-1)\overrightarrow{u} + q(p-1)\overrightarrow{v}\right].$$

Din

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C''A''} &= \overrightarrow{C''B} + \overrightarrow{BA''} \\ &= \frac{1}{2}\left[(p-1)\overrightarrow{u} + (q-1)\overrightarrow{v}\right] \end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B''A''} &= \overrightarrow{B''B} + \overrightarrow{BA''} \\ &= \frac{pq}{2(pq-1)}\left[(p-1)\overrightarrow{u} + (q-1)\overrightarrow{v}\right] \\ &= \frac{pq}{2(pq-1)}\overrightarrow{C''A''}. \end{aligned}$$

Prin urmare punctele A'', B'', C'' sunt coliniare. □

Observaţia 597 *Dreapta pe care se află punctele A'', B'', C'' se numeşte **dreapta lui Newton – Gauss.***

Teorema 598 *Fie DEF triunghiul cevian al unui punct T în raport cu triunghiul ABC ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Dreptele care unesc mijloacele laturilor triunghiului DEF cu mijloacele laturilor triunghiului ABC sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie M, N, P mijloacele segmentelor AT, BT, respectiv CT; D', E', F' mijloacele segmentelor EF, DF, respectiv DE; M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB (Figura 2.6). Teorema lui Gauss aplicată patrulaterului complet $AETFBC$

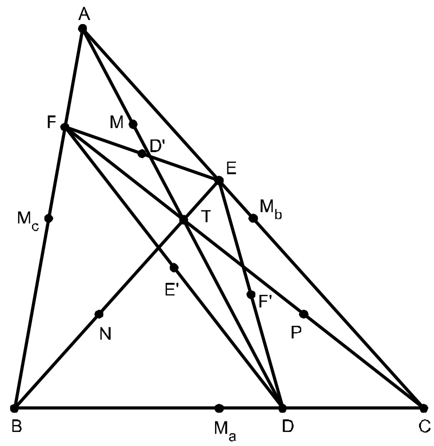

Figura 2.6: Patrulaterul complet $AETFBC$

ne dă faptul că mijloacele diagonalelor AT, EF şi BC (adică punctele M, D' şi M_a) sunt coliniare. Analog, punctele N, E', M_b sunt coliniare şi P, F', M_c sunt coliniare. Deoarece

$$MM_b = NM_a = \frac{CT}{2}$$

şi

$$MM_b \parallel NM_a$$

(MM_b, NM_a fiind linii mijlocii în triunghiurile ATC şi BTC) rezultă că patrulaterul MM_bM_aT este paralelogram, deci diagonalele sale MM_a şi NM_b se înjumătăţesc şi fie $\{Q\} = MM_a \cap NM_b$.

Analog, patrulaterul PM_aM_cM este paralelogram, deci dreapta PM_c trece tot prin mijlocul lui MM_a, adică prin Q. Dreptele M_aD', M_bE', respectiv M_cF' sunt concurente în punctul Q. □

Observaţia 599 *Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{F\} = AC \cap BD$, $\{E\} = AB \cap CD$, N mijlocul segmentului EF şi M mijlocul segmentului BC. Poligonul $ABCDEF$ se numeşte patrulater complet, iar AC, BD şi EF sunt diagonalele acestui patrulater complet. Teorema 596 poate fi reformulată astfel: mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt puncte coliniare.*

Teorema 600 (*Barbu, C. - Pătraşcu, I [16]*) *Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil iar P este mijlocul segmentului BF, atunci dreapta lui Newton - Gauss a patrulaterului complet $ABCDEF$ determină cu dreapta PM un unghi egal cu unghiul $\angle EFD$.*

Demonstraţie. Deoarece $PN \| BE$ şi $PM \| FC$ rezultă că $\angle EAC = \angle NPM$ şi $\frac{PN}{BE} = \frac{PM}{FC} = \frac{1}{2}$ (Figura 2.7). Cum $ABCD$ este inscriptibil, rezultă $\angle EDF = \angle ADE + \angle EDB = \angle ABC + \angle ECB = \angle EAC$ şi

$$AF \cdot FC = BF \cdot FD. \tag{i}$$

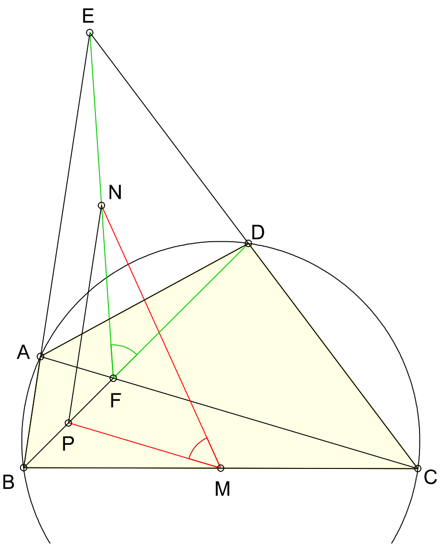

Figura 2.7: Dreapta lui Newton - Gauss (2)

Astfel,

$$\angle EAC = \angle NPM = \angle EDF. \tag{ii}$$

Din $\angle EAF = \angle EDF = 180° - \angle BAC$ rezultă

$$\sin EAF = \sin BAC. \tag{iii}$$

Din teorema sinusurilor în triunghiurile BED şi BFA, utilizând (iii), rezultă

$$\frac{BE}{BF} = \frac{2R_1 \sin EDF}{2R_2 \sin BAF} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2R_1 \sin ABF}{2R_2 \sin ABF} = \frac{ED}{AF},$$

(unde R_1 şi R_2 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BED şi BFA), deci

$$BE \cdot AF = BF \cdot ED. \tag{iv}$$

Din relaţiile (ii) şi (iv) obţinem $\frac{FC}{BE} = \frac{FD}{ED}$, de unde $\frac{FD}{ED} = \frac{PM}{PN}$, iar din (ii) rezultă că triunghiurile EDF şi NPM sunt asemenea. □

Observaţia 601 *Dacă K este mijlocul segmentului FC, atunci $\angle EFA = \angle KMN$.*

Teorema 602 (*Barbu, C. - Pătraşcu, I [16]*) *Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, paralela prin E la dreapta lui Newton - Gauss a patrulaterului complet $ABCDEF$ şi EF sunt drepte izogonale unghiului BEC.*

Demonstraţie. Cum triunghiurile EDF şi NPM sunt asemenea, atunci $\angle DEF = \angle PNM$ (Figura 2.8). Fie E' intersecţia dintre paralela la NM cu latura BC. Deoarece

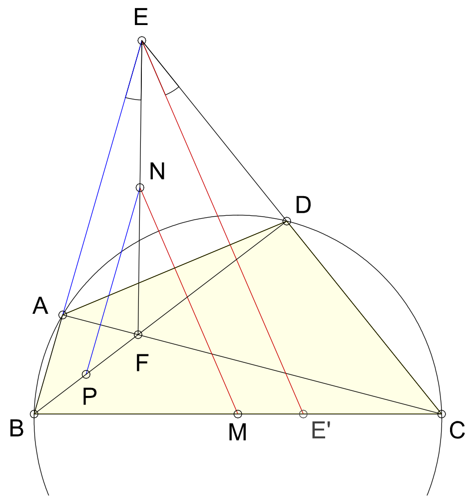

Figura 2.8: Drepte izogonale

$PN \| BE$ şi $NM \| EE'$ unghiurile $\widehat{BEF}$ şi $\widehat{PNF}$, respectiv $\widehat{FNM}$ şi $\widehat{E'EC}$ sunt egale. Atunci,

$$\angle E'EC = \angle FED - \angle FEE' = \angle PNM - \angle FNM = \angle PNF = \angle BEF.$$

□

Fie G şi J proiecţiile lui F pe dreptele AB şi CD.

Teorema 603 (*Barbu, C. - Pătraşcu, I [16]*) *Patruleterele $MPGN$ şi $MKJN$ sunt inscriptibile.*

Demonstraţie. Din teorema 600 avem $\angle EFD = \angle PMN$. Punctele P şi N sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor dreptunghice BFG şi EFG, atunci $\angle PGF = \angle PFG$ şi $\angle NGF = \angle NFG$ (Figura 2.9). Atunci,

$$\begin{aligned}\angle PGN + \angle PMN &= (\angle PGF + \angle NGF) + \angle PMN \\ &= \angle PFG + \angle NFG + \angle EFD = 180^\circ,\end{aligned}$$

deci $MPGN$ este inscriptibil. Analog se arată că $MKJN$ este inscriptibil. □

Observaţia 604 *Deoarece triunghiurile MPG şi JKM sunt congruente, rezultă că cercurile circumscrise patrulaterelor $MPGN$ şi $MKJN$ sunt egale.*

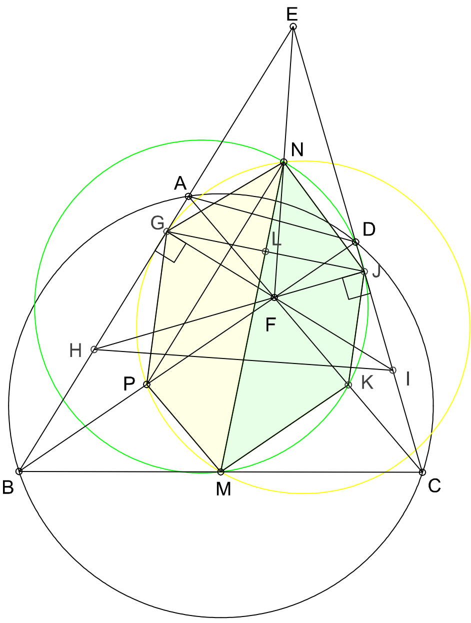

Figura 2.9: Patrulatere inscriptibile

Teorema 605 (*Barbu, C. - Pătraşcu, I [16]*) *Patrulaterele complete $EGFJIH$ şi $EAFDCB$ au aceeaşi dreaptă a lui Newton-Gauss.*

Demonstraţie. Cum $EAFDCB$ şi $EGFJIH$ au diagonala comună , EF, rezultă că N este pe dreapta Newton-Gauss a acestor patrulatere complete (Figura 2.9). Arătăm că dreapta Newton-Gauss trece prin mijlocul segmentului BC. Demonstrăm mai intâi că $MG = MJ$. Cum PM este linie mijlocie in triunghiul BFC, avem

$$PM = \frac{FC}{2}.$$

În triunghiul dreptunghic FJC, segmentul JK este mediană, deci

$$JK = \frac{FC}{2}.$$

Atunci, $PM = JK$. Analog, se arată că $GP = MK$. Deoarece $ABCD$ este inscriptibil, atunci $\angle ABF \equiv \angle DCF$, deci $\angle GPF \equiv \angle FKJ$. Cum $FPMK$ este paralelogram, rezultă $\angle FPM \equiv \angle FKM$, de unde $\angle GPM \equiv \angle JKM$. Din $PM = JK$ şi $GP = MK$ rezultă $GPM \equiv JKM$, deci $MG = MJ$. Dacă L este mijlocul segmentului GJ, atunci ML este mediatoarea segmentuluiu GJ, deci $ML \perp GJ$. Astfel, N este centrul cercului circumscris patrulaterului $EGFJ$, de unde $NL \perp GJ$. Obţinem astfel că punctele L, M şi N sunt coliniare, de unde rezultă concluzia. $\square$