sau $\phi = 2\widehat{ADO}$ (iii). Deoarece $E, F \in (IN)$, obţinem $\widehat{FOE} \leq \widehat{ION}$ (iv). Deoarece

$$2\widehat{ADO} = \widehat{AOE} = \widehat{FOE}, \tag{v}$$

din relaţiile (iii)-(v), obţinem $\phi \leq \widehat{ION}$ şi de aici rezultă $\cos\widehat{ION} \leq \cos\phi$. Dăm acum o demonstraţie geometrică pentru inegalitatea

$$-\cos\phi \leq \cos\widehat{ION} \tag{vii}$$

Dacă $\widehat{ION} < 90°$, atunci inegalitatea (vii) este trivială, deoarece numerele $\cos\phi$ şi $\cos\widehat{ION}$ sunt pozitive. Dacă $\widehat{ION} > 90°$, atunci inegalitatea (vii) este echivalentă cu

$$-2\sin\frac{\alpha+\phi}{2}\sin\frac{\alpha-\phi}{2} \leq 0$$

sau

$$\sin\frac{\alpha+\phi}{2}\sin\frac{\alpha-\phi}{2} \geq 0.$$

unde am notat măsura unghiului $\widehat{ION}$ cu α. Inegalitatea precedentă este adevărată deoarece $\frac{\alpha+\phi}{2}, \frac{\alpha-\phi}{2} \in (0, 90°)$.

Observaţia 613 *Numărul ϕ împarte triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R,r)$ în funcţie de poziţia punctului A pe cercul $O(R)$ (vezi D. Andrica, C. Barbu [6]).*

2.4 DREAPTA LUI BROCARD

„Cel ce caută metode de rezolvare fără a avea o problemă bine definită în minte, caută în cea mai mare parte în zadar."- David Hilbert[6]

Dreapta care uneşte centrul cercului circumscris (O) cu punctul lui Lemoine (K) al unui triunghi ABC se numeşte ***dreapta lui Brocard***[7]**.**

Teorema 614 *Dacă K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC, atunci*

$$OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Demonstraţie. Egalitatea

$$MK^2 = \frac{a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

(vezi [12, § ii.15]) pentru $M \equiv O$, devine

$$OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

□

[6] David Hilbert (1962-1943) – matematician german, profesor la Universitatea din Göttingen, contribuţii remarcabile în geometrie şi analiza matematică

[7] Henri Brocard (1845-1922) – matematician francez, contribuţii importante în geometrie

Teorema 615 *Este adevărată egalitatea:* $KO = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{\cos\omega}$, *unde* ω *este unghiul lui Brocard.*

Demonstraţie. Vezi „Punctele lui Brocard”. □

Teorema 616 *Centrul cercului circumscris triunghiului lui Grebe aparţine axei Brocard a triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi [12, § III.43]. □

Teorema 617 *Punctele izodinamice ale triunghiului* ABC *neechilateral sunt punctele de intersecţie dintre dreapta lui Brocard şi cercurile lui Apollonius.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izodinamice”. □

Teorema 618 *Punctele izodinamice aparţin axei Brocard* OK.

Demonstraţie. Vezi „Puncte izodinamice”. □

Teorema 619 *Dreapta lui Brocard* OK *este perpendiculară pe dreapta Lemoine a triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Lemoine”. □

Observaţia 620 *Punctul de intersecţie dintre dreapta lui Brocard şi dreapta lui Lemoine se numeşte* ***punctul lui Schoute****.*

Teorema 621 *Dreapta lui Simson a punctului lui Steiner în raport cu un triunghi* ABC *este paralelă cu dreapta lui Brocard.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Steiner”. □

Teorema 622 *Paralela dusă prin* A *la dreapta lui Brocard intersectează cercul circumscris triunghiului* ABC *în punctul* σ. *Perpendiculara dusă din punctul* σ *pe dreapta* BC *trece prin punctul lui Steiner al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Steiner”. □

Teorema 623 *Punctul lui Kenmotu aparţine dreptei lui Brocard a triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Kenmotu”. □