2.5 AXA ORTICĂ

„Matematica este cea mai educativă dintre toate materiile şcolare, deoarece atinge în gradul cel mai înalt şi elementele cele mai fine ale inteligenţei şi părţile cele mai cristaline ale sufletului omenesc.” - Gh. Ţiţeica[8]

Teorema 624 *Fie ABC un triunghi neisoscel şi nedreptunghic, iar $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic. Daca $\{A'\} = BC \cap H_bH_c$, $\{B'\} = AC \cap H_cH_a$, $\{C'\} = AB \cap H_aH_b$, atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.*

Demonstraţie. Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ABC (Figura 2.13) cu transversalele $A' - H_c - H_b$,$B' - H_c - H_a$,$C' - H_a - H_b$ rezultă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{H_bC}{H_bA} \cdot \frac{H_cA}{H_cB} = 1, \; \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{H_cA}{H_cB} \cdot \frac{H_aB}{H_aC} = 1, \; \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{H_aB}{H_aC} \cdot \frac{H_bC}{H_bA} = 1.$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile precedente rezultă: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ (deoarece

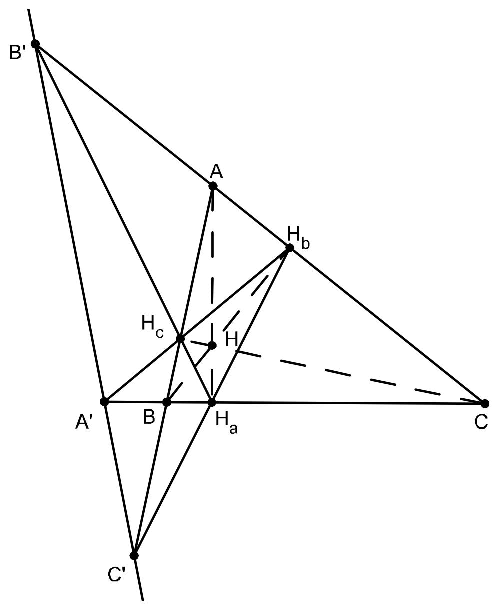

Figura 2.13: Axa ortică

dreptele AH_a,BH_b şi CH_c sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC, deci $\frac{H_aB}{H_aC} \cdot \frac{H_bC}{H_bA} \cdot \frac{H_cA}{H_cB} = 1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă ca punctele A', B', C' sunt coliniare. □

Observaţia 625 *Dreapta pe care se găsesc punctele A', B', C' se numeşte* ***dreapta*** *(**axa**)* ***ortică*** *a triunghiului ABC.*

[8] Gheorghe Ţiţeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea din Bucureşti, membru al Academiei Române, contribuţii importante în geometrie

Teorema 626 *Triunghiul ABC este omologic cu triunghiul său ortic, dreapta de omologie fiind axa ortică a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din teorema precedentă rezultă concluzia. □

Teorema 627 *Axa ortică a unui triunghi este axa radicală a fasciculului lui Griffiths al triunghiului (fasciculul de cercuri determinat de cercul circumscris şi de cercul lui Euler al unui triunghi).*

Demonstraţie. Fie $\{A'\} = BC \cap H_bH_c$,$\{B'\} = AC \cap H_cH_a$,$\{C'\} = AB \cap H_aH_b$, unde $H_aH_bH_c$ este triunghiul ortic al triunghiului ABC (Figura 2.14). Pentru a arăta

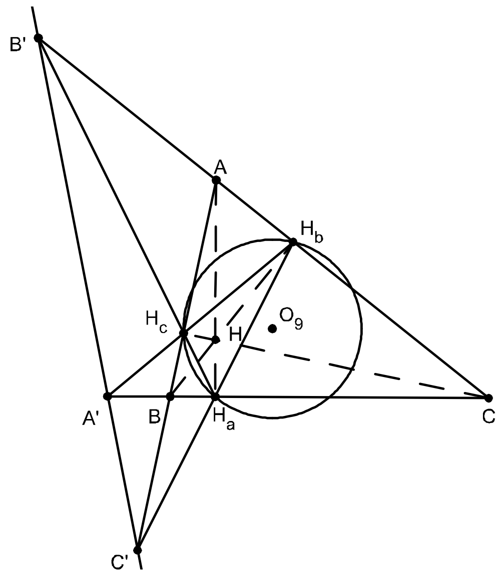

Figura 2.14: Fasciculul lui Griffiths

că axa ortică $A'B'$ este axa radicală a fasciculului lui Griffiths al triunghiului ABC este suficient sa arătăm că punctele A' şi B' au puteri egale faţă de cercul circumscris şi cercul lui Euler al triunghiului ABC. Patrulaterul BCH_bH_c fiind inscriptibil rezultă $A'H_c \cdot A'H_b = A'B \cdot A'C$, adică puterile punctului A' faţă de cele două cercuri sunt egale. Analog, se arată că puterile punctului B' faţă de cercul circumscris şi cercul lui Euler al triunghiului ABC sunt egale. □

Teorema 628 *Axa ortică a unui triunghi este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului.*

Demonstraţie. Proprietatea este evidentă deoarece axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe dreapta care trece prin centrele cercurilor. □

Teorema 629 *Axa ortică a triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$ este dreapta determinată de picioarele bisectoarelor exterioare ale triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$ este triunghiul ABC şi I - centrul cercului înscris în triunghiul ABC - este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$, soluţia este evidentă. $\square$

Observaţia 630 *Deoarece axa ortică a unui triunghi este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului rezultă ca dreapta ce uneşte picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi (dreapta antiortică) este perpendiculară pe dreapta OI.*

Teorema 631 *Diametrele ce pleacă din vârfurile triunghiului ABC, în cercul circumscris triunghiului ABC, intersectează laturile opuse în punctele A_1, B_1, respectiv C_1; L, M şi N sunt mijloacele segmentelor AA_1, BB_1, respectiv CC_1. Triunghiurile LMN şi ABC sunt omologice, axa de omologie fiind axa ortică a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Triunghiurile ABC şi LMN sunt evident omologice, centrul de omologie fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Fie $\{P\} = LM \cap AB$ şi M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $BC < CA$ şi $\{Q\} = M_aM_b \cap LM$ (Figura 2.15). Din asemănarea

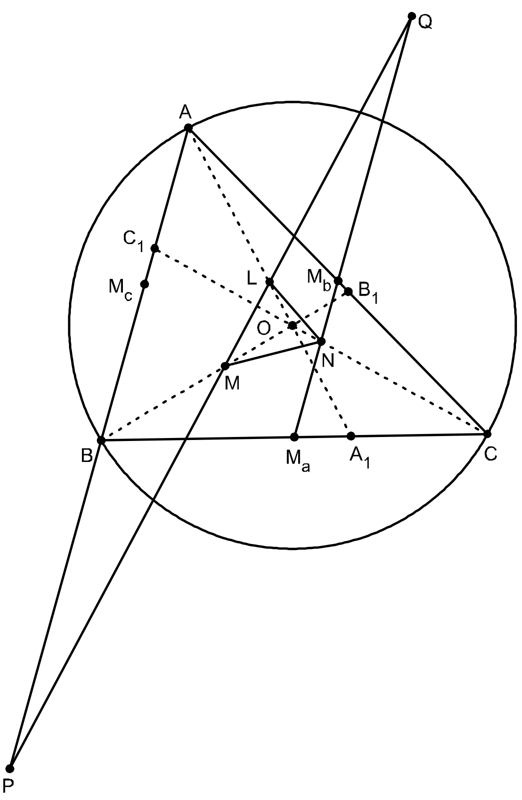

Figura 2.15: Triunghiuri omologice

triunghiurilor PMM_c cu QMM_a, respectiv PLM_c cu QLM_b avem:

$$\begin{aligned}\frac{M_aM_b}{PM_c} &= \frac{QM_a}{PM_c} - \frac{QM_b}{PM_c} = \frac{MM_a}{MM_c} - \frac{LM_b}{LM_c} \\ &= \frac{B_1C}{B_1A} - \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C} - \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \\ &= \frac{2\sin(A-B)\cos(A+B)}{2\sin C\cos C} \\ &= \frac{-\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{-tgA+tgB}{tgA+tgB}.\end{aligned}$$

Atunci,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM_c + M_cA}{PM_c - M_cA} = \frac{PM_c + M_aM_b}{PM_c - M_aM_b} = \frac{tgB}{tgA},$$

deci punctul P împarte latura AB, exterior, în raportul $\frac{tgB}{tgA}$. Deoarece înălţimea din C împarte AB, înterior, în aceeaşi raţie rezultă că P aparţine axei ortice a triunghiului ABC. □

2.6 DREAPTA ANTIORTICĂ

„A rezolva o problemă înseamnă a gasi o ieşire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul distinctiv al speciei umane; se poate spune ca, dintre toate indeletnicirile omeneşti, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică". - George Polya[9]

Teorema 632 *Fie ABC un triunghi neisoscel. Bisectoarea exterioară corespunzătoare vârfului A intersectează dreapta BC în A' şi analog se obţin punctele B' şi C'. Punctele A', B', C' sunt coliniare.*

Demonstraţie. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC (Figura 2.16). Din teorema bisectoarei avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c} \text{ şi } \frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a}.$$

Atunci,

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că puntele A', B', C' sunt coliniare. □

[9] George Polya (1887-1985) – matematician, fizician şi filozof maghiar cu contribuţii fundamentale în combinatorică (teoria grafurilor) şi logică.