triunghiurilor PMM_c cu QMM_a, respectiv PLM_c cu QLM_b avem:

$$\begin{aligned}
\frac{M_aM_b}{PM_c} &= \frac{QM_a}{PM_c} - \frac{QM_b}{PM_c} = \frac{MM_a}{MM_c} - \frac{LM_b}{LM_c} \\
&= \frac{B_1C}{B_1A} - \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C} - \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \\
&= \frac{2\sin(A-B)\cos(A+B)}{2\sin C\cos C} \\
&= \frac{-\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{-tgA + tgB}{tgA + tgB}.
\end{aligned}$$

Atunci,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM_c + M_cA}{PM_c - M_cA} = \frac{PM_c + M_aM_b}{PM_c - M_aM_b} = \frac{tgB}{tgA},$$

deci punctul P împarte latura AB, exterior, în raportul $\frac{tgB}{tgA}$. Deoarece înălţimea din C împarte AB, înterior, în aceeaşi raţie rezultă că P aparţine axei ortice a triunghiului ABC. □

2.6 DREAPTA ANTIORTICĂ

„A rezolva o problemă înseamnă a gasi o ieşire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul distinctiv al speciei umane; se poate spune ca, dintre toate indeletnicirile omeneşti, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică". - George Polya[9]

Teorema 632 *Fie ABC un triunghi neisoscel. Bisectoarea exterioară corespunzătoare vârfului A intersectează dreapta BC în A' şi analog se obţin punctele B' şi C'. Punctele A', B', C' sunt coliniare.*

Demonstraţie. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC (Figura 2.16). Din teorema bisectoarei avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c} \text{ şi } \frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a}.$$

Atunci,

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că puntele A', B', C' sunt coliniare. □

[9] George Polya (1887-1985) – matematician, fizician şi filozof maghiar cu contribuţii fundamentale în combinatorică (teoria grafurilor) şi logică.

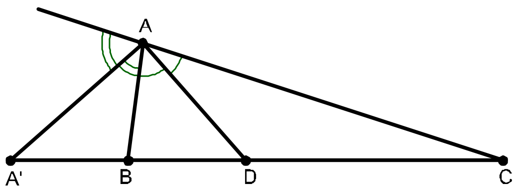

Figura 2.16: Dreapta antiortică

Observaţia 633 *Dreapta pe care se găsesc punctele A', B', C' se numeşte* ***dreapta (axa) antiortică*** *a triunghiului ABC.*

Observaţia 634 *Punctele de intersecţie dintre bisectoarele exterioare ale unghiurilor unui triunghi neisoscel cu dreptele suport ale laturilor opuse aparţin axei antiortice.*

Teorema 635 *Dreapta antiortică a triunghiului ABC este axa ortică a triunghiului antisuplementar corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.10]. □

Teorema 636 *Dreapta antiortică a triunghiului ABC este perpendiculară pe dreapta OI, unde O şi I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece axa ortică a unui triunghi este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului (vezi „Dreapta ortică"), rezultă că dreapta antiortică a triunghiului ABC - care este axa ortică a triunghiului $I_aI_bI_c$ al triunghiului ABC - este perpendiculară pe dreapta OI, deoarece O este centrul cercului celor nouă puncte al triunghiului $I_aI_bI_c$ şi I este ortocentrul aceluiaşi triunghi (vezi „Cercurile exînscrise"). □

Teorema 637 *Dreapta antiortică a unui triunghi ABC este axa de omologie dintre triunghiul ABC şi triunghiul său extangenţial.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.4]. □

Teorema 638 *Axa antiortică a unui triunghi este polara triliniară a centrului său înscris.*

Demonstraţie. Fie A' punctul de intersecţie dintre bisectoarea exterioară a unghiului A şi dreapta BC, A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare şi a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB (Figura 2.16). Din teorema bisectoarei rezultă

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}, \ \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a}, \ \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a}{c},$$

de unde

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A', B_1, C_1 sunt coliniare, deci dreapta B_1C_1 intersectează dreapta BC în punctul A' ce aparţine axei antiortice a triunghiului ABC.

Analog se arată că punctul de intersecţie dintre dreapta A_1C_1 şi dreapta AC coincide cu punctul de intersecţie dintre bisectoarea exterioară a unghiului B şi dreapta AC, deci axa antiortică coincide cu polara triliniară a centrului cercului înscris în triunghiul ABC. □

2.7 DREAPTA LUI SIMSON

„De la toţi am învăţat. Mă surprind uneori vorbind olimpian ca Pompeiu, apăsat ca Ţiţeica, senin şi simplu ca David Emanuel. Căci noi nu suntem numai fiii părinţilor noştri, ci şi fiii profesorilor noştri."- Miron Nicolescu[10]

Teorema 639 (***Teorema lui Simson***[11]) *Proiecţiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, pe laturile acestuia, sunt coliniare.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie M un punct pe cercul circumscris unui triunghi ABC şi A', B', C' proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, respectiv AB (Figura 2.17). Patrulaterele $MC'AB', MB'A'C$ sunt inscriptibile. Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle AB'C') &= m(\sphericalangle AMC') = 90^\circ - m(\sphericalangle C'AM) \\ &= 90^\circ - m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle A'MC) \\ &= m(\sphericalangle A'B'C), \end{aligned}$$

adică unghiurile $\sphericalangle AB'C'$ şi $\sphericalangle A'B'C$ sunt opuse la vârf, deci punctele A', B'şi C'sunt coliniare.

Soluţia 2. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Pentru ca punctele A', B', C' să fie coliniare este suficient să arătăm că: $\frac{b'-a'}{b'-c'} \in \mathbb{R}$. Patrulaterul $MCA'B'$ fiind inscriptibil, punctele M, C, A', B' sunt conciclice, adică:

$$\frac{b'-a'}{b'-m} \cdot \frac{c-m}{c-a} \in \mathbb{R}. \qquad \text{(i)}$$

[10]Miron Nicolescu (1903-1975) – matematician ramân, membru al Academiei Române, contribuţii în analiza matematică

[11]Robert Simson (1687-1768) – matematician scoţian, profesor la Universitatea din Edinburgh, contribuţii în geometrie