de unde
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=1$$
şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A', B_1, C_1 sunt coliniare, deci dreapta B_1C_1 intersectează dreapta BC în punctul A' ce aparţine axei antiortice a triunghiului ABC.

Analog se arată că punctul de intersecţie dintre dreapta A_1C_1 şi dreapta AC coincide cu punctul de intersecţie dintre bisectoarea exterioară a unghiului B şi dreapta AC, deci axa antiortică coincide cu polara triliniară a centrului cercului înscris în triunghiul ABC. □

2.7 DREAPTA LUI SIMSON

„De la toţi am învăţat. Mă surprind uneori vorbind olimpian ca Pompeiu, apăsat ca Ţiţeica, senin şi simplu ca David Emanuel. Căci noi nu suntem numai fiii părinţilor noştri, ci şi fiii profesorilor noştri."- Miron Nicolescu[10]

Teorema 639 (***Teorema lui Simson***[11]) *Proiecţiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, pe laturile acestuia, sunt coliniare.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie M un punct pe cercul circumscris unui triunghi ABC şi A', B', C' proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, respectiv AB (Figura 2.17). Patrulaterele $MC'AB', MB'A'C$ sunt inscriptibile. Avem:
$$\begin{aligned} m(\sphericalangle AB'C') &= m(\sphericalangle AMC') = 90^\circ - m(\sphericalangle C'AM)\\ &= 90^\circ - m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle A'MC)\\ &= m(\sphericalangle A'B'C),\end{aligned}$$
adică unghiurile $\sphericalangle AB'C'$ şi $\sphericalangle A'B'C$ sunt opuse la vârf, deci punctele A', B'şi C'sunt coliniare.

Soluţia 2. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Pentru ca punctele A', B', C' să fie coliniare este suficient să arătăm că: $\frac{b'-a'}{b'-c'}\in\mathbb{R}$. Patrulaterul $MCA'B'$ fiind inscriptibil, punctele M, C, A', B' sunt conciclice, adică:
$$\frac{b'-a'}{b'-m}\cdot\frac{c-m}{c-a}\in\mathbb{R}. \qquad \text{(i)}$$

[10] Miron Nicolescu (1903-1975) – matematician ramân, membru al Academiei Române, contribuţii în analiza matematică

[11] Robert Simson (1687-1768) – matematician scoţian, profesor la Universitatea din Edinburgh, contribuţii în geometrie

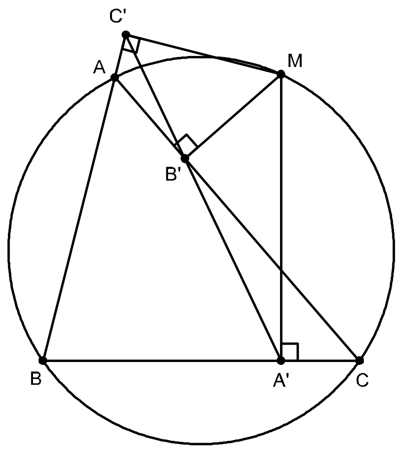

Figura 2.17: Dreapta lui Simson

Patrulaterul $MCA'B'$ este inscriptibil, deci

$$\frac{b'-m}{b'-c'} \cdot \frac{a-c'}{a-m} \in \mathbb{R}. \tag{ii}$$

Înmulţind relaţiile (i) şi (ii) rezultă:

$$\frac{b'-a'}{b'-c'} \cdot \frac{c-m}{c-a'} \cdot \frac{a-c'}{a-m} \in \mathbb{R}. \tag{iii}$$

Punctele A, B, C şi M fiind conciclice rezultă: $\frac{a-m}{a-b} \cdot \frac{c-b}{c-m} \in \mathbb{R}$ (iv). Înmulţind relaţiile (iii) şi (iv) rezultă:

$$\frac{b'-a'}{b'-c'} \cdot \frac{a-c'}{a-b} \cdot \frac{c-b}{c-a'} \in \mathbb{R}. \tag{v}$$

Punctele A, C', B fiind coliniare rezultă $\frac{a-c'}{a-b} \in \mathbb{R}$ (vi) şi analog punctele B, A', C fiind coliniare $\frac{c-b}{c-a'} \in \mathbb{R}$ (vii). Din relaţiile (v), (vi) şi (vii) rezultă $\frac{b'-a'}{b'-c'} \in \mathbb{R}$, adică punctele A', B'şi C' sunt coliniare. □

Teorema 640 (***Reciproca teoremei lui Simson***) *Dacă M este un punct situat în exteriorul triunghiului ABC şi proiecţiile A', B', C' ale punctului M pe dreptele BC, AC, respectiv AB sunt coliniare, atunci punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Punctele A', B', C' fiind coliniare rezultă $m(\sphericalangle AB'C') = m(\sphericalangle A'B'C)$. Atunci,

$$m(\sphericalangle AB'C') = m(\sphericalangle AMC') = 90^\circ - m(\sphericalangle MAC')$$

şi

$$m(\sphericalangle A'B'C) = m(\sphericalangle A'MC) = 90^\circ - m(\sphericalangle A'CM),$$

de unde rezultă $m(\sphericalangle MAC') = m(\sphericalangle MCB)$, adică patrulaterul $MABC$ este inscriptibil, deci punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. □

Observaţia 641 *Dreapta care conţine punctele A', B', C' se numeşte* ***dreapta lui Simson*** *a punctului M în raport cu triunghiul ABC, iar punctul M se numeşte* ***polul*** *dreptei lui Simson.*

Teorema 642 *Perpendiculara coborâtă dintr-un punct M situat pe cercul circumscris triunghiului ABC intersectează din nou cercul în M'. Dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu AM'.*

Demonstraţie. Avem $m(\sphericalangle M'AC) = m(\sphericalangle M'MC) = \frac{1}{2}m(\widehat{M'C})$, iar din patrulaterul inscriptibil $A'B'MC$ rezultă

$$\sphericalangle A'B'C \equiv \sphericalangle A'MC \equiv \sphericalangle M'MC$$

de unde $\sphericalangle M'AC \equiv \sphericalangle A'B'C$, adică $AM' \parallel A'C'$. □

Teorema 643 (***Teorema lui Steiner***) *Dreapta lui Simson a unui punct M în raport cu triunghiul ABC trece prin mijlocul segmentului determinat de punctul M şi ortocentrul H al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $A'B'$ dreapta lui Simson a punctului M, H_a piciorul înălţimii din A pe BC, $\{A_1\} = AH_a \cap \mathcal{C}$, $\{M'\} = MA' \cap \mathcal{C}$ (unde $\mathcal{C}$ este cercul circumscris triunghiului ABC), $\{P\} = MA_1 \cap BC$ şi $\{S\} = AM' \cap BC$ (Figura 2.18).

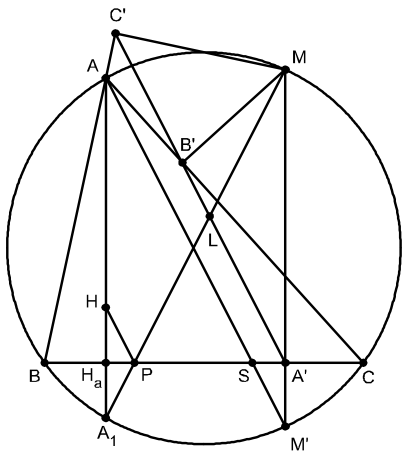

Figura 2.18: Teorema lui Steiner

Este cunoscut faptul că A_1 este simetricul ortocentrului H faţă de latura BC. Din $MM' \parallel AA_1$ rezultă

$$m(\sphericalangle A_1AM) = m(\sphericalangle A_1MM') = \frac{1}{2}m(\widehat{AM}),$$

iar $m(\sphericalangle AA_1M) = m(\sphericalangle A_1MM')$ (alterne interne), deci $\sphericalangle AA_1M \equiv \sphericalangle A_1AM$ (i). Atunci, $m(\sphericalangle ASP) = 90° - m(\sphericalangle H_aAS)$ (ii) şi

$$m(\sphericalangle H_aPA_1) = 90° - m(\sphericalangle H_aA_1P) = m(\sphericalangle MPC) \qquad \text{(iii)}$$

Din relaţiile (i), (ii) şi (iii) rezultă $\sphericalangle MPS \equiv \sphericalangle ASP$ (iv). Deoarece $A'C' \parallel AS$ rezultă că triunghiul LPA' este isoscel (unde $\{L\} = MP \cap A'C'$), deci $LP \equiv LA' \equiv LM$ (deoarece triunghiul $PA'M$ este dreptunghic în A'). Cum L este mijlocul lui PM şi $HP \parallel AM' \parallel A'C'$ rezultă că dreapta lui Simson trece prin mijlocul segmentului HM. $\square$

Teorema 644 *Mijlocul segmentului determinat de punctul M şi ortocentrul triunghiului ABC aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, O_9 mijlocul segmentului OH este centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC. Dacă E este mijlocul segmentului HM, atunci EO_9 este linie mijlocie în triunghiul HOM, deci $O_9E = \frac{OM}{2} = \frac{R}{2}$, adică E este punct pe cercul lui Euler al triunghiului ABC. $\square$

Teorema 645 *Dreptele lui Simson în raport cu triunghiul ABC a două puncte M şi N fac între ele un unghi congruent cu acela a cărui măsură pe cercul circumscris triunghiului ABC este jumătatea arcului $\widehat{MN}$.*

Demonstraţie. Fie M' şi N' intersecţiile perpendicularelor duse din M şi N pe latura BC cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 2.19). Conform teoremei

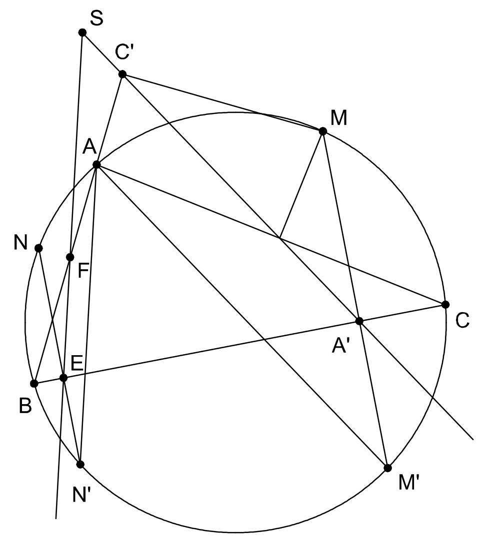

Figura 2.19: Dreptele lui Simson a două puncte

642 unghiul dintre cele două drepte ale lui Simson este egal cu unghiul $\sphericalangle M'AN'$ şi deoarece $MM' \parallel NN'$ rezultă $m(\widehat{MN}) = m(\widehat{M'N'})$ de unde se obţine: $m(\sphericalangle M'AN') = \frac{1}{2}m(\widehat{M'N'}) = \frac{1}{2}m(\widehat{MN})$. $\square$

Teorema 646 *Dreptele lui Simson a două puncte diametral opuse de pe cercul circumscris unui triunghi sunt perpendiculare şi se intersectează într-un punct ce aparţine cercului lui Euler al triunghiului.*

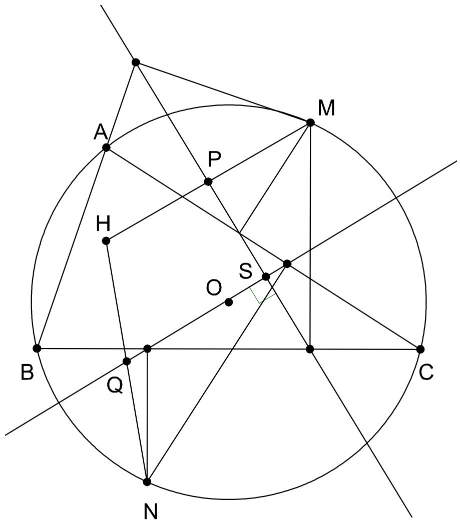

Figura 2.20: Dreptele lui Simson a două puncte diametral opuse

Demonstraţie. Fie P şi Q mijloacele segmentelor MH respectiv HN (unde H este ortocentrul triunghiului ABC, iar M şi N punctele diametral opuse) (Figura 2.20). Conform proprietăţii precedente unghiul dintre dreptele lui Simson ale punctelor M şi N are măsura $\frac{1}{2}m(\widehat{MN}) = 90°$. Deci cele două drepte Simson sunt perpendiculare; conform teoremei 643 dreapta lui Simson corespunzătoare punctului M trece prin P (mijlocul lui MH), iar dreapta lui Simson corespunzătoare punctului N trece prin Q (mijlocul lui NH), deci PQ este linie mijlocie în triunghiul MNH, adică $PQ = \frac{1}{2}MN = R$. Conform teoremei 644 punctele P şi Q aparţin cercului lui Euler al triunghiului ABC, deci PQ este diametru în cercul lui Euler al triunghiului. Dacă S este punctul de întâlnire a celor două drepte Simson, cum $m(\sphericalangle PSQ) = 90°$, rezultă că S aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC. $\square$

Teorema 647 *Dreptele lui Simson ale punctelor diametral opuse vârfurilor unui triunghi sunt laturile triunghiului.*

Demonstraţie. Fie A' punctul diametral opus vârfului A al triunghiului ABC

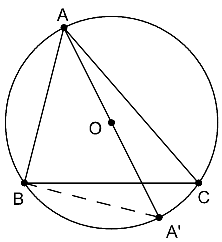

Figura 2.21: Dreapta lui Simson a punctului diametral opus unui vârf

(Figura 2.21). Atunci $m(\sphericalangle A'BA) = m(\sphericalangle A'CA) = 90°$, deci dreapta lui Simson corespunzătoare punctului A' este dreapta BC. □

Teorema 648 *Dreptele lui Simson ale vârfurilor unui triunghi sunt înălţimile triunghiului.*

Demonstraţie. Picioarele perpendicularelor duse din A pe AB şi AC coincid cu A, iar perpendiculara pe BC este înălţimea din A, deci dreapta lui Simson corespunzătoare vârfului A al triunghiului ABC este înălţimea din A a triunghiului. □

Teorema 649 *Dreptele lui Simson ale punctelor de intersecţie ale înălţimilor unui triunghi ABC cu cercul circumscris acestuia sunt paralele cu tangentele duse în vârfurile triunghiului ABC la cercul circumscris şi trec prin vârfurile triunghiului ortic.*

Demonstraţie. Fie $\{A'\} = AH_a \cap \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ este cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 2.22). Evident dreapta lui Simson corespunzătoare punctului A' trece

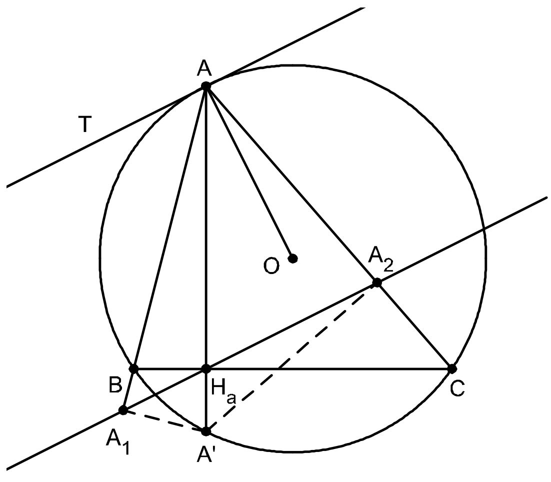

Figura 2.22: Dreaptă a lui Simson antiparalelă

prin H_a (deoarece $A'H_a \perp BC$). Fie TA tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci,

$$m(\sphericalangle TAA') = m(\sphericalangle ACA') = \frac{1}{2} m(\sphericalangle ABA') \qquad \text{(i)}$$

Fie A_1 şi A_2 proiecţiile lui A' pe AB, respectiv AC. Avem: $m(\sphericalangle A_1H_aA') = m(\sphericalangle A'CA_2)$ (ii) (deoarece patrulaterul $A'H_aA_2C$ este inscriptibil având $m(\sphericalangle A'H_aC) = m(\sphericalangle A'A_2C) = 90°$). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\sphericalangle TAA' \equiv \sphericalangle A_1HA'$, adică $TA \parallel A_1A_2$. □

Observaţia 650 *Proprietatea precedentă poate fi reformulată astfel: „Într-un triunghi ABC, dreptele lui Simson ale punctelor unde înălţimile intersectează cercul circumscris triunghiului ABC sunt antiparalele laturilor opuse vârfurilor din care plecă înălţimile şi trec prin picioarele acestora."*

Teorema 651 *Dreptele lui Simson ale simetricelor ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de laturile triunghiului sunt paralele cu laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Soluţia rezultă din proprietatea precedentă. □

Teorema 652 *Dreptele lui Simson ale punctului de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale unui triunghi ABC cu cercul circumscris acestuia trec prin mijloacele laturilor triunghiului ABC şi sunt perpendiculare pe bisectoarele interioare ale triunghiului.*

Demonstraţie. Fie A' punctul de intersecţie al bisectoarei din A' cu cercul circumscris triunghiului ABC şi A_1, A_2, A_3 proiecţiile punctului A' pe laturile AB, BC, respectiv CA. Deoarece A' este mijlocul arcului $\widehat{BC}$ rezultă că A_2 este mijlocul laturii BC (Figura 2.23). Patrulaterele $A'A_1BA_2$ şi $A'A_2CA_3$ fiind inscriptibile rezultă

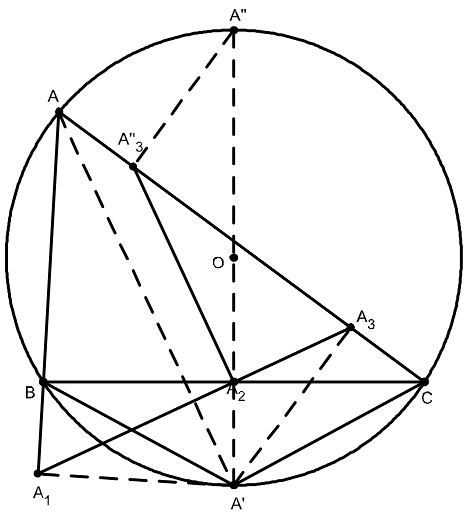

Figura 2.23: Dreaptă a lui Simson perpendiculară pe bisectoare

$$\sphericalangle BA_1A_2 \equiv \sphericalangle BA'A_2 \equiv \sphericalangle A_2A'C \equiv \sphericalangle A_2A_3A,$$

deci triunghiul A_1AA_3 este isoscel, de unde $AA' \perp A_1A_3$. □

Teorema 653 *Dreptele lui Simson ale punctelor de intersecţie dintre bisectoarele exterioare ale unghiurilor unui triunghi ABC cu cercul circumscris triunghiului trec prin mijloacele laturilor triunghiului, sunt paralele cu bisectoarele interioare ale triunghiului şi sunt concurente în punctul lui Spieker al triunghiului.*

Demonstraţie. Fie A'' punctul de intersecţie al bisectoarei exterioare a unghiului A cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 2.23). Deoarece A'' este punctul diametral opus lui A' rezultă (cf. th. 647) că dreapta lui Simson a lui A'' este perpendiculară pe dreapta lui Simson a punctului A'; conform teoremei 652 rezultă că dreapta lui Simson a lui A'' este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului A. Deoarece A'' este mijlocul arcului BAC rezultă că proiecţia lui A'' pe BC este mijlocul laturii BC. Fie $A_2B_2C_2$ triunghiul median al triunghiului ABC şi $A_3^{''}$ proiecţia lui A'' pe latura AC. Avem $A_2A_3^{''} \parallel AA'$, $A_2B_2 \parallel AB$ şi $A_2C_2 \parallel AC$, deci

$$m(\sphericalangle A_3^{''}A_2B_2) = m(\sphericalangle C_2A_2A_3^{''}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC),$$

adică dreapta lui Simson corespunzătoare lui A'' este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B_2A_2C_2$. Analog, se arată că bisectoarele unghiurilor B_2 şi C_2 ale triunghiului median sunt dreptele lui Simson ale punctelor B'' şi C'' (punctele de intersecţie ale bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B şi C cu cercul circumscris) şi cum bisectoarele triunghiului median sunt concurente în punctul lui Spieker al triunghiului ABC, rezultă concluzia. □

Teorema 654 *Fie punctele conciclice A, B, C, D. Dacă drepta lui Simson a punctului A în raport cu triunghiul BCD este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului BCD, atunci dreapta lui Simson a punctului B este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului CDA.*

Demonstraţie. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare (Figura 2.24). Atunci, ortocentrul triunghiului BCD are afixul $b + c + d$. Picioarele

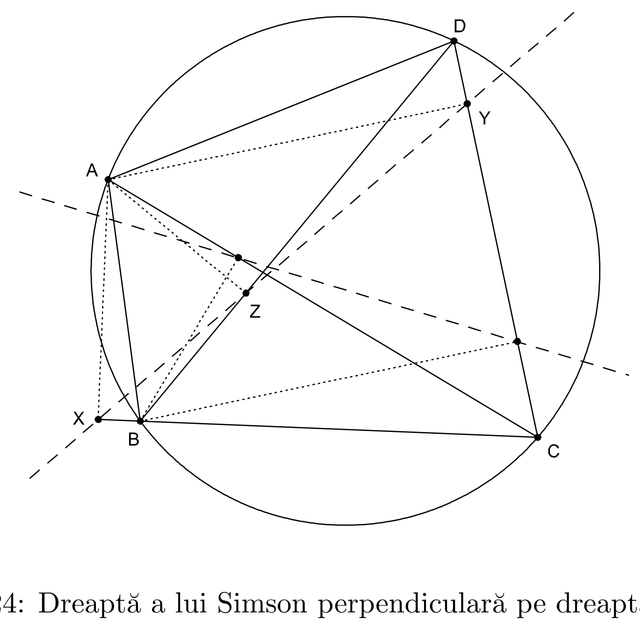

Figura 2.24: Dreaptă a lui Simson perpendiculară pe dreapta lui Euler

perpendicularelor duse din A pe BC, CD şi DB au afixele:

$$x = \frac{1}{2}(a + b + c - \overline{a}bc), y = \frac{1}{2}(a + c + d - \overline{a}cd), z = \frac{1}{2}(a + d + b - \overline{a}db).$$

Punctele $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ aparţin dreptei lui Simson a punctului A în raport cu triunghiul BCD. Dreapta lui Euler a triunghiului BCD este perpendiculară pe dreapta lui Simson a punctului A în raport cu triunghiul BCD dacă numărul

$$\alpha = \frac{2(x-y)}{b+c+d} = \frac{\overline{a}(a-c)(b-d)}{b+c+d} \in R^*,$$

adică $\alpha = \overline{\alpha}$ sau $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$ şi cum această relaţie este simetrică în a, b, c şi d rezultă concluzia. □

Teorema 655 *Dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach* (φ) *al triunghiului , în raport cu triunghiul de contact* $C_aC_bC_c$ *al triunghiului* ABC *este paralelă cu dreapta* OI (O *şi* I *fiind centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul* ABC).

Demonstraţie. Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului (Figura 2.25), O_9 centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC, A', B', C' punctele de intersecţie dintre dreptele $\varphi C_a, \varphi C_b$, respectiv φC_c cu cercul lui Euler al triunghiului ABC. Deoarece

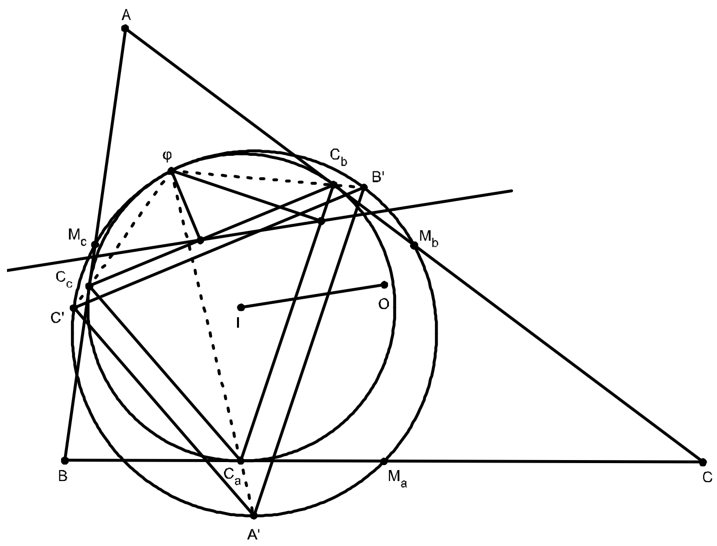

Figura 2.25: Dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach

cercul înscris şi cercul lui Euler sunt tangente în punctul lui Feuerbach, laturile triunghiurilor $C_aC_bC_c$ şi $A'B'C'$ sunt paralele două câte două, deci triunghiurile $C_aC_bC_c$ şi $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul φ. Deoarece dreptele lui Simson ale punctului φ în raport cu triunghiurile $C_aC_bC_c$ şi $A'B'C'$ sunt paralele rezultă concluzia. □

Teorema 656 *Într-un triunghi* ABC, *dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach* (φ) *în raport cu triunghiul median al triunghiului* ABC, *este paralelă cu dreapta* OI (O *şi* I *fiind centrele cercurilor circumscris şi înscris ale triunghiului* ABC).

Demonstraţie. Ortopolul diametrului cercului circumscris triunghiului ABC ce trece prin I este punctul lui Feuerbach (vezi „Ortopolul unui triunghi”) – punct ce aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC. Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC şi α, β, γ simetricele punctului lui Feuerbach (φ) faţă de laturile M_bM_c, M_aM_c, M_aM_b ale triunghiului median. Punctele α, β, γ aparţin dreptei OI deoarece φ este ortopolul acestei drepte. Dacă α', β', γ' sunt proiecţiile lui φ pe laturile triunghiului median atunci $\alpha'\beta'$ este dreapta lui Simson a punctului φ şi este paralelă cu OI, deoarece $\alpha'\beta'$ este linie mijlocie în triunghiul $\varphi\alpha\beta$. □

Teorema 657 *Dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach al unui triunghi ABC, în raport cu triunghiul ortic este paralelă cu dreapta OI (O şi I fiind centrele cercurilor circumscris şi înscris al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Deoarece triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ şi triunghiul median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC sunt două triunghiuri S, dreptele lui Simson ale punctului lui Feuerbach (φ) al triunghiului ABC în raport cu triunghiurile $H_aH_bH_c$ şi $M_aM_bM_c$ sunt paralele, deci conform teoremei precedente, paralele cu OI. □

Teorema 658 *Fie M un punct pe cercul circumscris unui triunghi ABC, iar A', B', C' punctele în care dreapta lui Simson (d_M) a punctului M intersectează laturile BC, CA, respectiv AB. Simetricele vârfurilor A, B, C în raport cu mijloacele segmentelor $B'C'$, $C'A'$, respectiv $A'B'$ aparţin unei drepte perpendiculare pe dreapta d_M.*

Demonstraţie. Notăm A'', B'', C'' simetricele vârfurilor A, B, C în raport cu mijloacele segmentelor $B'C', C'A', A'B'$ (Figura 2.26). Deoarece patrulaterul $AC''A''C'$

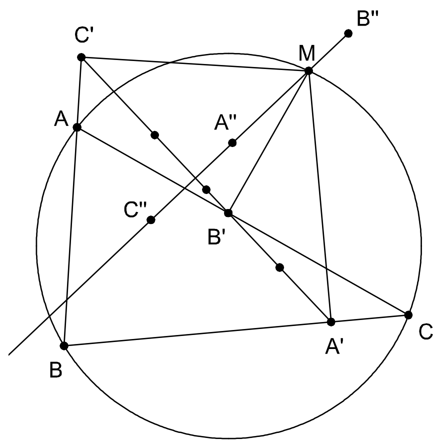

Figura 2.26: $MA''\perp d_M$

este paralelogram rezultă $A''B'||AC'$ şi $A''C'||B'A$; cum $MC'\perp AB$ şi $MB'\perp AC$ rezultă $A''B'\perp MC'$ şi $CA''\perp MB'$, relaţii ce arată că A'' este ortocentrul triunghiului $MB'C'$, deci $MA''\perp B'C'$, adică $MA''\perp d_M$. Analog, $MB''\perp d_M$ şi $MC''\perp d_M$, de unde rezultă că punctele A'', B'', C'' sunt coliniare. □

Teorema 659 *Fie ABC şi DEF două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc. Dreptele lui Simson ale punctelor D, E, F în raport cu triunghiul ABC determină un triunghi $D'E'F'$ asemenea cu triunghiul DEF.*

Demonstraţie. Fie d_D, d_E, d_F dreptele lui Simson ale punctelor D, E, respectiv F în raport cu triunghiul ABC (Figura 2.27). Avem:

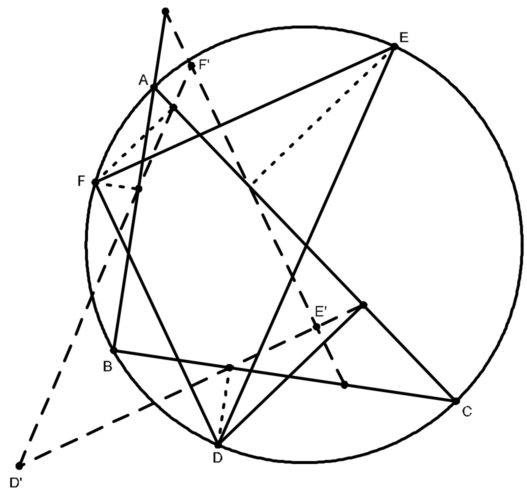

Figura 2.27: Triunghiuri asemenea

$$m(\widehat{d_E, d_D}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ED}) = m(\widehat{DFE}),\ m(\widehat{d_E, d_F}) = \frac{1}{2}m(\widehat{EF}) = m(\widehat{FDE}),$$

de unde rezultă că triunghiurile DEF şi $D'E'F'$ (determinat de dreptele d_D, d_E, d_F) sunt asemenea. $\square$

Observaţia 660 *Analog, triunghiul determinat de dreptele lui Simson ale punctelor A, B, C în raport cu triunghiul DEF determină un triunghi $A'B'C'$ asemenea cu ABC.*

Teorema 661 *În cercul circumscris triunghiului ABC, ducem coarda MM' paralelă cu BC. Dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe dreapta $M'A$.*

Demonstraţie. Fie B' punctul diametral opus lui B în cercul circumscris triunghiului ABC, d_M dreapta lui Simson a punctului M şi T proiecţia lui M pe AC, $\{P\} = d_M \cap AM'$ (Figura 2.28). Avem: $(\widehat{d_M, CA}) = \frac{1}{2}(\widehat{MB'})$, $m(\widehat{CM'}) = m(\widehat{BM})$ de unde rezultă că

$$\begin{aligned} m(\widehat{APT}) &= 180^\circ - [m(\widehat{TAP}) + m(\widehat{ATP})] \\ &= 180^\circ - [\frac{1}{2}m(\widehat{CM'}) + \frac{1}{2}m(\widehat{MB'})] \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}[m(\widehat{BM}) + m(\widehat{MB'})] \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

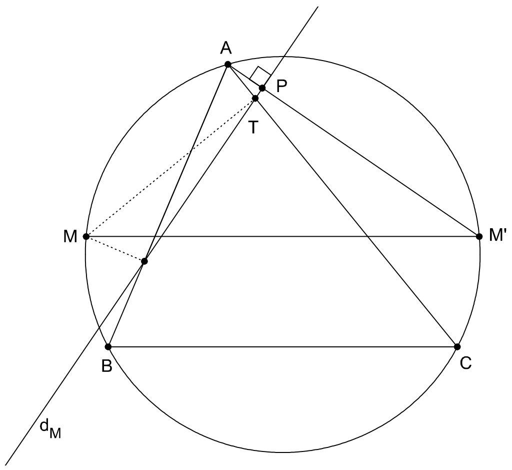

Figura 2.28: Coardă paralelă cu BC

□

Teorema 662 *Triunghiul determinat de intersecţiile dreptelor lui Simson ale punctelor unde înălţimile unui triunghi ABC taie cercul circumscris triunghiului ABC este anticomplementarul triunghiului ortic.*

Demonstraţie. Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC şi A_h, B_h, C_h punctele de intersecţie dintre înălţimile triunghiului ABC cu cercul circumscris acestui triunghi.

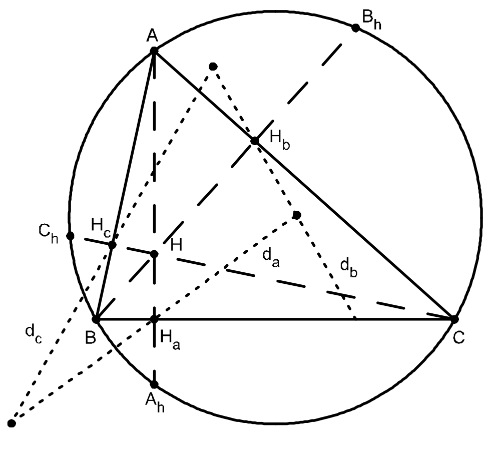

Figura 2.29: Anticomplementarul triunghiului ortic

Notăm cu d_a, d_b, d_c dreptele lui Simson ale punctelor A_h, B_h, C_h în raport cu triunghiul ABC (Figura 2.29). Atunci dreapta d_a este antiparalela laturii BC ce trece prin punctul H_a. Analog, d_b si d_c sunt antiparalele laturilor CA, respectiv AB şi trec prin H_b, respectiv H_c, deci $d_a||H_bH_c$, $d_b||H_aH_c$, $d_c||H_aH_b$, de unde rezultă că triunghiul determinat de dreptele d_a, d_b, d_c este anticomplementarul triunghiului ortic. □

Teorema 663 (***Teorema lui Droz-Farny***) *Fie două triunghiuri ABC şi DEF înscrise în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi M un punct oarecare pe cercul $\mathcal{C}$. Să se arate că dreptele lui Simson ale punctului M în raport cu triunghiurile ABC şi respectiv DEF se intersectează sub un unghi constant.*

Demonstraţie. Fie N, P proiecţiile punctului M pe BC şi EF, iar K şi L punctele în care MN, respectiv MP intersectează cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dreptele lui Simson ale lui M în raport cu triunghiurile ABC şi DEF sunt paralele cu AK şi DL.

Fie S punctul de intersecţie al dreptelor lui Simson (NS şi PS) (Figura 2.30).

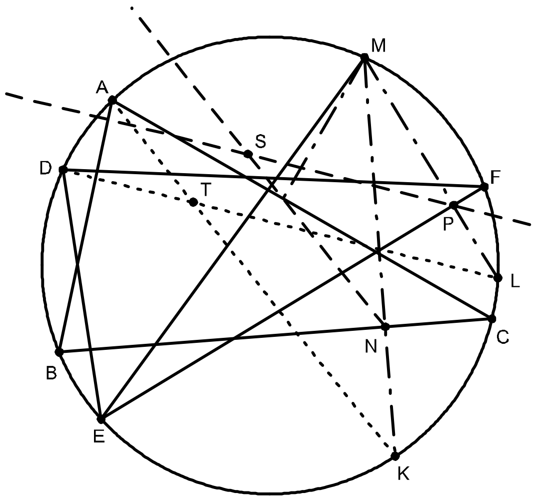

Figura 2.30: Teorema lui Droz-Farny

Unghiul dintre ele este egal cu unghiul dintre dreptele AK şi DL. Fie $\{T\} = AK \cap DL$. Considerăm arcele de pe cercul $\mathcal{C}$ în sens trigonometric. Atunci,

$$m(\widehat{ATD}) = \frac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{KL})}{2}$$

şi cum $m(\widehat{BNM}) = m(\widehat{CNK}) = 90^\circ$ rezultă $m(\widehat{KC}) + m(\widehat{MB}) = 180^\circ$ şi $m(\widehat{ME}) - m(\widehat{FL}) = 180^\circ$,

$$\begin{aligned} m(\widehat{KL}) &= m(\widehat{KC}) + m(\widehat{CF}) + m(\widehat{FL}) \\ &= 180^\circ - m(\widehat{MB}) + m(\widehat{CF}) + m(\widehat{ME}) - 180^\circ, \end{aligned}$$

deci $m(\widehat{KL}) = m(\widehat{CF}) + m(\widehat{BE})$. Astfel, $m(\widehat{ATD}) = \frac{m(\widehat{AD})+m(\widehat{BE})+m(\widehat{CF})}{2}$ care arată că unghiul $\widehat{ATD}$ este constant. □

Teorema 664 *Unghiul pe care îl fac două drepte ale lui Simson ale unui punct oarecare în raport cu două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc este egal cu unghiul care subîntinde un arc egal cu suma algebrică a celor trei arce cuprinse între vârfurile acestor triunghiuri, luate câte două.*

Demonstraţie. Soluţia este imediată din teorema 663. □

Teorema 665 *Fie ABC şi DEF două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc. Dreptele lui Simson ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul DEF şi dreptele lui Simson ale vârfurilor triunghiului DEF în raport cu triunghiul ABC, determină cu înălţimile care pleacă din vârfurile considerate, unghiuri egale între ele.*

Demonstraţie. Din teorema lui Droz - Farny rezultă că dreptele lui Simson ale punctelor A şi D în raport cu triunghiurile ABC şi DEF determină un unghi egal (Figura 2.31). Dar, dreptele lui Simson d_A şi d_D ale punctelor A şi D în raport cu

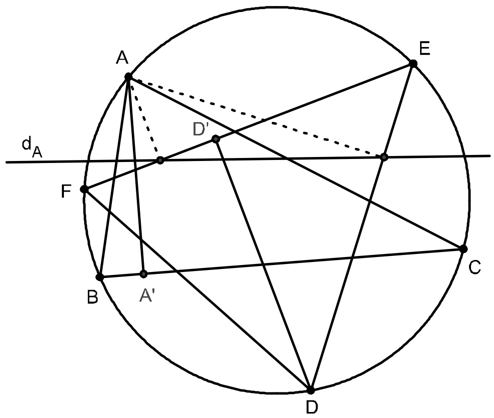

Figura 2.31: Unghiuri egale

triunghiul ABC, respectiv triunghiul DEF sunt înălţimile AA', respectiv DD'. Deci, unghiul dintre dreapta lui Simson a punctului A în raport cu DEF şi AA' este egal cu unghiul dintre dreapta lui Simson a punctului D în raport cu ABC şi DD'. □

Teorema 666 *Într-un triunghi ABC, dreapta lui Simson a unui punct M este perpendiculară pe izogonala dreptei AM.*

Demonstraţie. Fie d dreapta lui Simson a punctului M şi AM' izogonala dreptei AM (Figura 2.32). Avem:

$$m(\widehat{d, BC}) + m(\widehat{BC, AM'}) = 180^\circ - m(\widehat{AM', d}).$$

Dacă A' este punctul diametral opus lui A, atunci

$$\begin{aligned} m(\widehat{BC, d}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{A'M}), m(\widehat{BC, AM'}) \\ &= \frac{1}{2}[m(\widehat{AC}) - m(\widehat{BM'})] \\ &= \frac{1}{2}m(\widehat{AM}). \end{aligned}$$

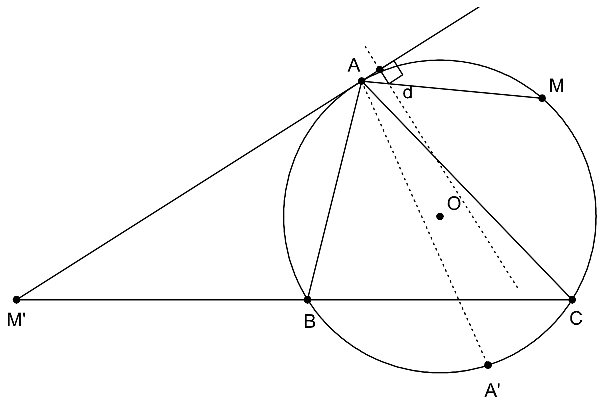

Figura 2.32: Dreaptă a lui Simson perpendiculară pe o izogonala

Astfel,

$$m(\widehat{d, BC}) + m(\widehat{BC, AM'}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{A'M}) + m(\widehat{MA})] = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

de unde rezultă că $m(\widehat{AM', d}) = 90^\circ$. □

Teorema 667 *Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri ortoomologice şi τ centrul lor de omologie. Dreptele lui Simson ale punctului τ faţă de triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt paralele cu axa de omologie.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.23]. □

Teorema 668 *Fie $H_aH_bH_c$ şi $M_aM_bM_c$ triunghiul ortic, respectiv triunghiul median al unui triunghi ABC. Dreptele lui Simson ale punctelor M_a, M_b, M_c în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH, CH. Punctele şi sunt diametral opuse în cercul lui Euler al triunghiului ABC, deci proiecţia lui M_a pe H_bH_c este punctul A'', mijlocul segmentului H_bH_c, adică $A'' \in (A'M_a)$. Atunci dreapta Simson a punctului M_a va fi paralelă cu H_aA' (cf. th. 642) (Figura 2.33). Fie B'' şi C'' mijloacele segmentelor H_aH_c, respectiv H_aH_b. Triunghiul $A''B''C''$ este triunghiul median al triunghiul ortic $H_aH_bH_c$. Atunci, dreptele lui Simson considerate sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului median $A''B''C''$, deci concurente în punctul lui Taylor – T al triunghiului ABC. □

Teorema 669 *Fie $H_aH_bH_c$ şi $M_aM_bM_c$ triunghiul ortic, respectiv triunghiul median al unui triunghi ABC, A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH, unde H este ortocentrul triunghiului ABC. Dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ determină un triunghi $S_1S_2S_3$ ortologic şi omotetic cu triunghiul ABC şi omotetic cu $M_aM_bM_c$.*

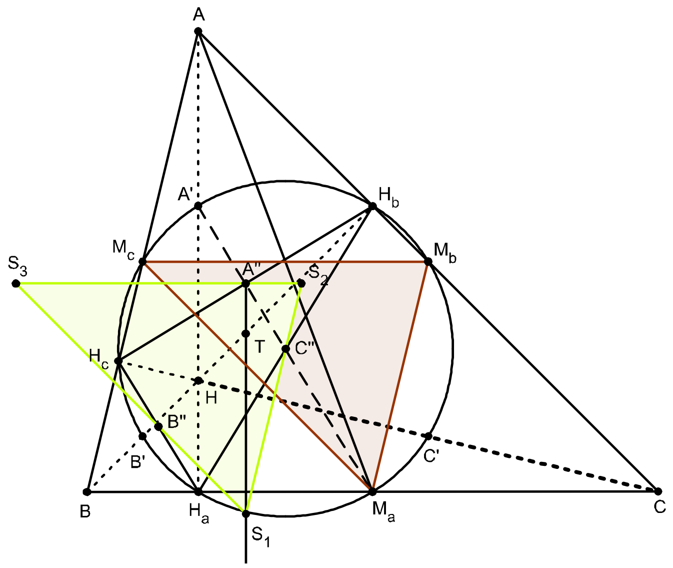

Figura 2.33: Drepte ale lui Simson concurente în centrul cercului lui Taylor

Demonstraţie. Laturile triunghiului $S_1S_2S_3$ trec prin mijloacele A'', B'', C'' ale laturilor triunghiului $H_aH_bH_c$ (Figura 2.33). Dreptele lui Simson ale punctelor diametral opuse şi în cercul lui Euler sunt perpendiculare, deci $S_2S_3 \perp A''T$, iar cum $TA'' \parallel AA'$ şi $AH_a \perp BC$ rezultă că $S_2S_3 \parallel BC$. Analog $S_1S_2 \parallel AB$ şi $S_1S_3 \parallel AC$. Deci, triunghiurile ABC şi $S_1S_2S_3$ sunt omotetice. Perpendicularele din A, B, C pe S_2S_3, S_3S_1, respectiv S_1S_2 sunt concurente în H ceea ce arată că triunghiurile ABC şi $S_1S_2S_3$ sunt ortologice. Avem

$$\sphericalangle B''A''S_3 \equiv \sphericalangle H_bH_aC \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle S_3S_1S_2,$$

deci $A''B''C''$ este triunghiul ortic al lui $S_1S_2S_3$ şi fiind congruent cu triunghiul ortic al triunghiului $M_aM_bM_c$ rezultă că triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi $M_aM_bM_c$ sunt congruente. □

Teorema 670 *Dreptele AS_1, BS_2, CS_3 sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului $H_aH_bH_c$.*

Demonstraţie. Din congruenţa triunghiurilor $S_1S_2S_3$ şi $M_aM_bM_c$ rezultă $S_1A'' = \frac{1}{2}AH_a$, iar din asemănarea triunghiurilor $A''S_1G_1$ şi $A''AG_1$ (unde $\{G_1\} = AS_1 \cap H_aA''$) rezultă

$$\frac{A''G}{G_1H_a} = \frac{A''S_1}{AH_a} = \frac{1}{2},$$

deci G_1 este centrul de greutate al triunghiului $H_aH_bH_c$. Analog, se arată că dreptele BS_2 şi CS_3 trec prin G_1.

Teorema 671 *Dreptele lui Simson ale punctelor M_a, M_b, M_c, mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ABC, în raport cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ sunt înălţimi în triunghiul $S_1S_2S_3$.*

Demonstraţie. Deoarece T este centrul cercului înscris în triunghiul $A''B''C''$, triunghiul ortic triunghiului $S_1S_2S_3$ (cf. th 666), rezultă că T este ortocentrul triunghiului $S_1S_2S_3$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 672 *Centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $S_1S_2S_3$.*

Demonstraţie. Soluţia rezultă din teorema 671. □

Teorema 673 *Dreptele lui Simson ale punctelor M_a, M_b, M_c în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt laturile triunghiului $A'B'C'$.*

Demonstraţie. Deoarece M_aA' este diametru în cercul lui Euler al triunghiului ABC, iar B' şi C' sunt puncte pe acest cerc rezultă că proiecţiile lui M_a pe $A'B'$ şi $A'C'$ cad în B', respectiv C', adică $B'C'$ este dreapta lui Simson a punctului M_a. Analog se arată că $A'C'$ şi $A'B'$ sunt dreptele lui Simson ale punctelor M_b, respectiv M_c. □

Teorema 674 *Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC, $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC. Dreptele lui Simson ale punctelor H_a, H_b, H_c în raport cu triunghiul $M_aM_bM_c$ sunt paralele cu dreptele AO, BO, respectiv CO.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH, CH, unde H este ortocentrul triunghiului ABC şi D, E, F proiecţiile punctului H_a pe dreptele M_aM_b, M_bM_c, respectiv M_aM_c (Figura 2.34). Conform teoremei 642, dreapta lui Simson a

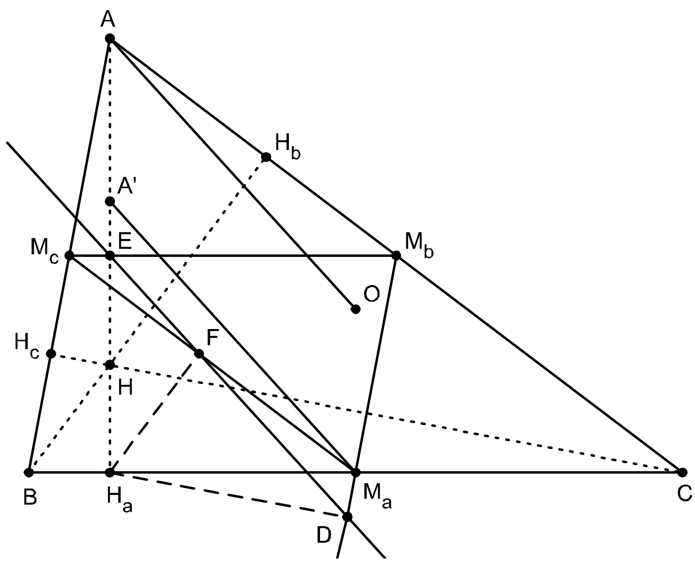

Figura 2.34: Dreapta lui Simson a punctului H_a este paralelă cu AO

punctului H_a este paralelă cu dreapta M_aA' şi întrucât $M_aA' \parallel AO$ (vezi „Cercul lui Euler") rezultă $DE \parallel AO$. □

Teorema 675 *Dreptele lui Simson ale punctelor* H_a, H_b, H_c *în raport cu triunghiul* $M_aM_bM_c$ *sunt concurente în centrul cercului lui Taylor al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi „Cercul lui Taylor”. □

Teorema 676 *Fie* P *un punct pe cercul circumscris unui triunghi* ABC, P_a, P_b, P_c *picioarele înălţimilor duse din* P *pe dreptele* BC, CA, *respectiv* AB. *Pe înălţimile* AH_a, BH_b, CH_c *ale triunghiului* ABC *se consideră punctele* A', B', C' *astfel încât* $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP_a}, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{PP_b}$ *şi* $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{PP_c}$. *Punctele* A', B', C' *aparţin dreptei lui Simson a punctului* P' *diametral opus punctului* P *în cercul circumscris triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie D proiecţia lui P' pe BC şi P” al doilea punct de intersecţie dintre $P'D$ cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 2.35). Atunci, $P''D \equiv PP_a$

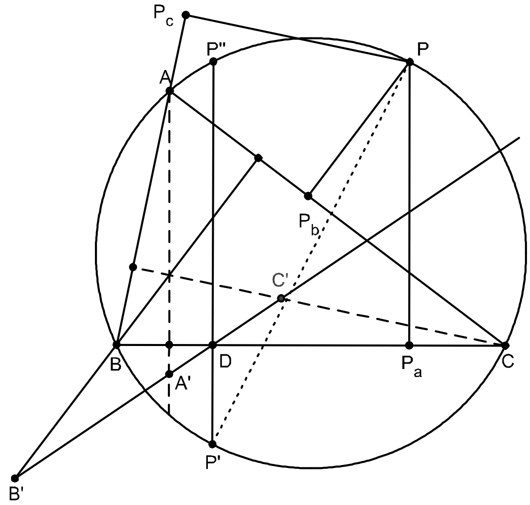

Figura 2.35: Dreapta lui Simson a punctului P' diametral opus punctului P

(deoarece P şi P' sunt diametral opuse şi P”$D \parallel PP_a$) şi cum $PP_a \equiv AA'$ rezultă $P''D \equiv AA'$ şi $P''D \parallel AA'$, deci patrulaterul $AP''DA'$ este paralelogram de unde $AP'' \parallel DA'$, rezultă că $A'D$ este dreapta lui Simson a punctului P' (cf. th. 642**)**. Analog se arată că punctele B' şi C' aparţin acestei drepte. □

Teorema 677 *Fie* A, B, C, D *patru puncte conciclice. Dreptele lui Simson ale fiecărui punct în raport cu triunghiul determinat de celelalte trei puncte, sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB şi d_A, d_B, d_C, d_D dreptele lui Simson ale punctelor A, B, C, D în raport cu triunghiurile BCD, ACD, ABD, respectiv ABC (Figura 2.36). Dreptele d_A, d_B, d_C, d_D trec prin mijloacele segmentelor AH_2, BH_3, CH_4, respectiv DH_1.

Patrulaterele $ABCD$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente şi omotetice (vezi [12, § III.1]), deci segmentele DH_1, AH_2, BH_3 şi CH_4 - care unesc vârfurile omoloage – sunt concurente în centrul de omotetie O'. Deoarece patrulaterul AH_1H_2D este paralelogram

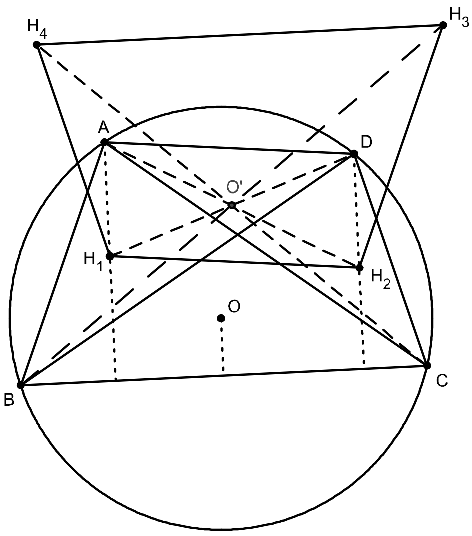

Figura 2.36: Puncte conciclice

rezultă că O' este mijlocul segmentelor DH_1, AH_2, BH_3, CH_4 - punct comun dreptelor d_A, d_B, d_C, d_D. □

Teorema 678 *Fie M un punct pe cercul circusmscris al unui triunghi ABC, iar A' şi B' proiecţiile lui M pe BC, respectiv AC. Atunci, $MA \cdot MA' = 2Rd$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC şi d este distanţa de la M la dreapta $A'B'$.*

Demonstraţie. Fie $m(\sphericalangle MCA) = \varphi$. Atunci, $MA = 2R\sin\varphi$ şi $m(\sphericalangle MA'B') = m(\sphericalangle MCB') = \varphi$, deci $MA' = \frac{d}{\sin\varphi}$, de unde $MA \cdot MA' = 2Rd$. □

Observaţia 679 *Deoarece proiecţiile lui M pe laturile triunghiului sunt puncte co - liniare, rezultă:*

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC' = 2R \cdot d.$$

Teorema 680 *Fie M un punct pe cercul circumscris unui triunghi ABC, iar A', B', C' proiecţiile lui M pe BC, CA, respectiv AB. Lungimea segmentului $A'B'$ este egală cu lungimea proiecţiei segmentului AB pe dreapta $A'B'$.*

Demonstraţie. Deoarece punctele A' şi B' aparţin unui cerc de diametru MC, rezultă

$$A'B' = MC\sin\widehat{A'CB'} = MC\sin\widehat{ACB} \qquad \text{(i)}$$

(Figura 2.37). Fie $m(\sphericalangle BC'A') = \varphi$ şi M' proiecţia lui M pe $A'B'$. Conform teoremei precedente $MC \cdot MC' = 2R \cdot MM'$. În triunghiul $MM'C'$ avem: $\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{MM'}{MC'}$, de unde

$$\cos\varphi = \frac{MM'}{MC'} = \frac{MC}{2R} \qquad \text{(ii)}$$

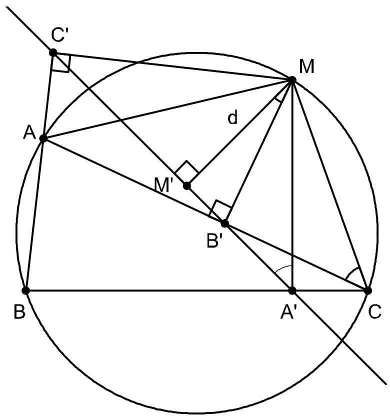

Figura 2.37: Lungimea segmentului $A'B'$

Lungimea proiecţiei segmentului AB pe dreapta $A'B'$ este egală cu

$$AB\cos\varphi = AB \cdot \frac{MC}{2R} = 2R\sin\widehat{ACB} \cdot \frac{MC}{2R} = MC\sin\widehat{ACB} \qquad \text{(iii)}$$

Din relaţiile (i) şi (iii) rezultă concluzia. □

Teorema 681 *Dreapta lui Simson a unui punct M în raport cu un triunghi ABC intersectează laturile şi înălţimile triunghiului în D şi D', E şi E', respectiv F şi F'. Segmentele DD', EE' şi FF' au acelaşi mijloc ce aparţine cercului lui Euler al triun - ghiului ABC.*

Demonstraţie. Dreapta lui Simson a punctului M trece prin punctul P – mijlocul

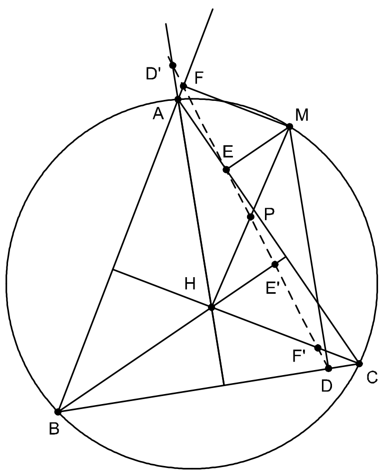

Figura 2.38: Mijlocul segmentului DD' aparţine cercului lui Euler

segmentului HM (Figura 2.38). Atunci, triunghiurile DPH şi MPD sunt congruente ($\sphericalangle HPD' \equiv \sphericalangle MPD$, $\sphericalangle D'HP \equiv \sphericalangle DMP$, $HP \equiv PM$), deci $D'P \equiv PD$. Analog, $\triangle HPE' \equiv \triangle MPE$ şi $\triangle HPF \equiv \triangle MPF'$ de unde $E'P \equiv PE$ şi $F'P \equiv PF'$, adică segmentele DD', EE' şi FF' au acelaşi mijloc P. Dar prin P – mijlocul segmentului MH – trece cercul lui Euler al triunghiului ABC. □

Teorema 682 *Două drepte Simson perpendiculare sunt transversale izotomice.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izotomice". □

Teorema 683 *Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC şi X, Y, Z proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, respectiv AB. Atunci,*

$$\frac{BC}{MX} = \frac{AC}{MY} + \frac{AB}{MZ}.$$

Demonstraţie. Avem: $m(\sphericalangle ABM) = 180° - m(\sphericalangle ACM) = \alpha$, $m(\sphericalangle BAM) =$

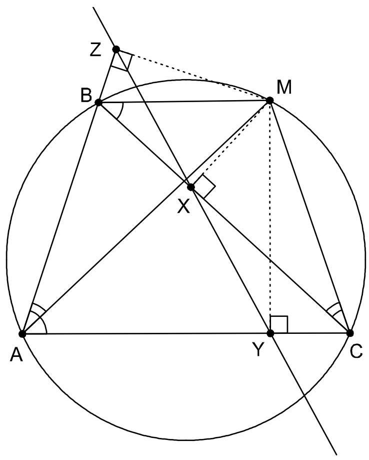

Figura 2.39: $\frac{BC}{MX} = \frac{AC}{MY} + \frac{AB}{MZ}$

$m(\sphericalangle BCM) = \beta$ şi $m(\sphericalangle CAM) = m(\sphericalangle CBM) = \gamma$ (Figura 2.39), deci $MX = MB \sin\gamma = 2R\sin\beta\sin\gamma$, $MY = 2R\sin\alpha\sin\gamma$ şi $MZ = 2R\sin\alpha\sin\beta$, iar $BC = 2R\sin\widehat{BAC} = 2R\sin(\beta+\gamma)$, $AC = 2R\sin(\alpha-\gamma)$, $AB = 2R\sin(\alpha+\beta)$. Egalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

relaţie ce se demostrează prin calcul direct. □