2.8 DREAPTA LUI LEMOINE

„O notaţie bună are o subtilitate şi o sugestivitate care uneori o face să pară un profesor viu.”
– Bertrand Russell[12]

Teorema 684 (***Teorema lui Lemoine***[13]) *Tangentele la cercul circumscris unui triunghi neisoscel în vârfurile acestuia intersecteazâ laturile opuse în trei puncte coliniare.*

Demonstraţie. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecţie dintre tangentele date cu laturile opuse ale triunghiului ABC (Figura 2.40). Triunghiurile A_1AB şi A_1AC au

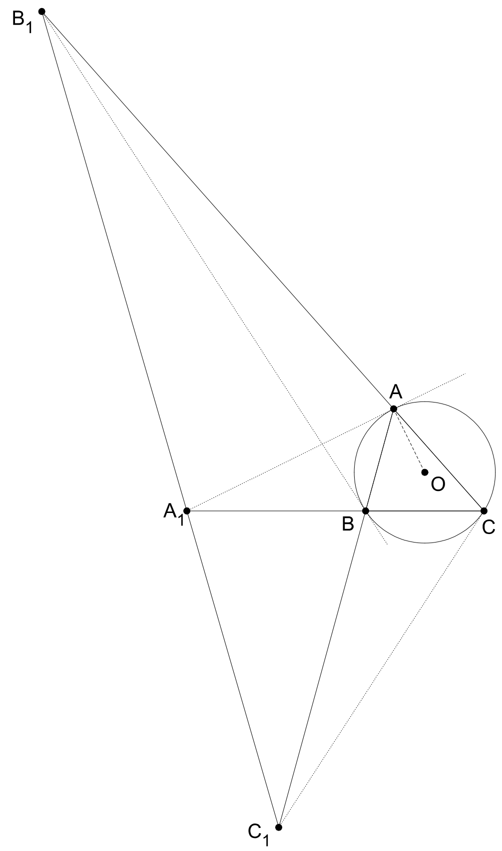

Figura 2.40: Teorema lui Lemoine

unghiul A_1 comun şi $m(\widehat{A_1AB}) = m(\widehat{A_1CA})$, deci sunt asemenea. Atunci, $\frac{A_1B}{A_1A} = \frac{AB}{AC} = \frac{A_1A}{A_1C}$, de unde $\frac{A_1B}{A_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Analog, $\frac{B_1C}{B_1A} = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$ şi $\frac{C_1A}{C_1B} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2$. Cum

[12] Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician şi matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

[13] Emile Lemoine (1840-1912) – matematician francez, contribuţii importante în geometrie

$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$, din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare. □

Observaţia 685 *Dreapta A_1B_1 se numeşte* ***dreapta lui Lemoine*** *a triunghiului ABC.*

Teorema 686 *Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt simedianele exterioare ale vârfurilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Simediane exterioare”. □

Teorema 687 *Triunghiul ABC şi triunghiul său tangenţial sunt omologice, dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC fiind axa de omologie.*

Demonstraţie. Din teorema lui Lemoine rezultă că dreapta lui Lemoine este axa de omologie dintre triunghiul ABC şi triunghiul său tangenţial, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC (vezi „Punctul lui Lemoine”). □

Observaţia 688 *Teorema precedentă poate fi reformulată astfel: „Dreapta lui Lemoine a unui triunghi ABC este polara triliniară a punctului simedian al triunghiului ABC.”*

Teorema 689 *Centrele cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC sunt punctele de intersecţie ale dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC cu laturile acestui triunghi.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile lui Apollonius”. □

Teorema 690 *Dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC este perpendiculară pe dreapta OK.*

Demonstraţie. Deoarece OK este axa radicală a cercurilor lui Apollonius, rezultă că dreapta OK este perpendiculară pe dreapta centrelor - adică pe dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC (vezi „Cercurile lui Apollonius”). □

Observaţia 691 *Dreapta OK este* ***dreapta lui Brocard****. Proprietatea precedentă se mai poate enunţa astfel: „Dreptele lui Lemoine şi Brocard ale triunghiului ABC sunt perpendiculare”. Punctul de intersecţie dintre dreapta lui Lemoine şi dreapta lui Brocard se numeşte* ***punctul lui Schoute.***

Teorema 692 *Punctele izodinamice S şi S' ale unui triunghi neechilateral ABC sunt simetrice faţă de dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece OK (unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC) este perpendiculară pe dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC, rezultă că SS' este perpendiculară pe dreapta lui Lemoine, ceea ce arată că punctele izodinamice S şi S' sunt simetrice faţă de dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC. □