**Demonstraţie.** Din teorema precedentă rezultă concluzia. □

**Teorema 702** *Dreapta lui Steiner a punctului $M$ trece prin ortocentrul triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Deoarece punctul $P$ - mijlocul segmentului $MH$ - aparţine dreptei lui Simson a punctului $M$ (vezi „Dreapta lui Simson") şi $B'$ este mijlocul segmentului $MM_2$ rezultă că $PB'$ este linie mijlocie în triunghiul $MHM_2$, deci $PB'||HM_2$, adică paralelele prin $M_2$ la dreapta lui Simson a punctului $M$ trece prin $H$, deci dreapta lui Steiner a punctului $M$ conţine ortocentrul triunghiului $ABC$. □

**Teorema 703** *Dreptele lui Steiner ale simetricelor ortocentrului $H$ al triunghiului $ABC$ faţă de laturile triunghiului sunt paralele cu laturile triunghiului ortic al triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Fie $A_1$, simetricul lui $H$ faţă de latura $BC$. Punctul $A_1$ aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$ (vezi „Ortocentrul unui triunghi"). Deoarece dreapta lui Simson a punctului $A_1$ este paralelă cu latura $H_bH_c$ a triunghiului ortic (vezi „Dreapta lui Simson"), atunci utilizând teorema 699 rezultă concluzia. □

## 2.11 DREPTE IZOGONALE. PUNCTE IZOGONALE

„Matematica este regina ştiinţelor." - Carl Gauss[16]

Semidreptele $[AM$şi $[AM'$ se numesc ***izogonale*** faţă de unghiul $\sphericalangle BAC$ dacă sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ (Figura 2.44).

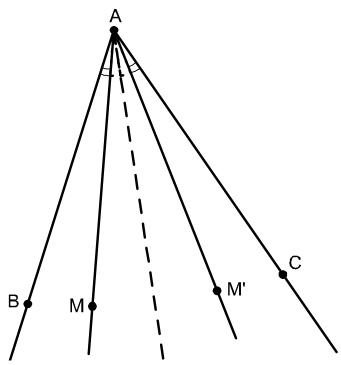


Figura 2.44: Drepte izogonale

[16] Carl Gauss (1777-1855) – matematician, fizician şi astronom german,contribuţii în teoria numerelor, geometrie diferenţială, analiză matematică, statistică

**Observaţia 704** *Dacă $AM$ şi $AM'$ sunt izogonale în raport cu unghiul $\sphericalangle BAC$, atunci $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle M'AC$ şi $\sphericalangle BAM' \equiv \sphericalangle CAM$.*

**Teorema 705** *În triunghiul $ABC$ fie izogonalele $AM$ şi $AM'$, $D$ şi $D'$, $E$ şi $E'$ proiecţiile punctelor $M$ şi $M'$ respectiv pe $AB$ şi $AC$. Atunci,*

$$\frac{MD}{ME} = \frac{M'E'}{M'D'}.$$

**Demonstraţie.**Fie $N$ simetricul punctului $M$ faţă de bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, iar $N'$ şi $N$" proiecţiile punctului $N$ pe laturile $AC$, respectiv $AB$ (Figura 2.45).

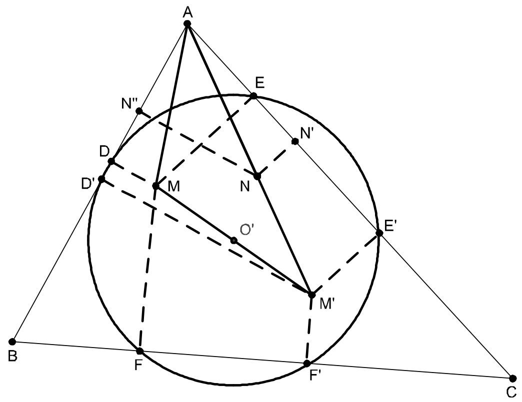


Figura 2.45: $\frac{MD}{ME} = \frac{M'E'}{M'D'}$

Avem: $\frac{NN'}{NN"} = \frac{M'E'}{M'D'}$, $NN' \equiv MD$, $NN" \equiv ME$ (deoarece $\Delta ANN' \equiv \Delta AMD$ şi $\Delta ANN" \equiv \Delta AME$), de unde: $\frac{MD}{ME} = \frac{M'E'}{M'D'}$. □

**Teorema 706** (***Teorema celor şase puncte***) *Proiecţiile a două puncte izogonale pe laturile triunghiului de referinţă sunt şase puncte conciclice.*

**Demonstraţie.** Avem: $\frac{AN'}{AE'} = \frac{AN"}{AD'}$ sau $\frac{AD}{AE'} = \frac{AE}{AD'}$, adică dreptele $DE$ şi $D'E'$ sunt antiparalele, deci punctele $D, D', E, E'$ aparţin unui cerc cu centrul în mijlocul segmentului $MM'$ (perpendicularele ridicate din mijloacele segmentelor $DD'$ şi $EE'$ intersectându-se în mijlocul segmentului $MM'$). Analog, punctele $D, F, F', D'$ (unde $F$ şi $F'$ sunt proiecţiile punctelor $M$ şi $M'$ pe latura $BC$) sunt pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $MM'$, deci punctele $D, E, F, D', E', F'$ aparţin aceluiaşi cerc. □

**Teorema 707** *Dreptele $DE$ şi $AM'$, respectiv $D'E'$ şi $AM$ sunt perpendiculare.*

**Demonstraţie.** Patrulaterul $DAEM$ fiind inscriptibil rezultă $\sphericalangle MDE \equiv \sphericalangle MAE$, deoarece $m(\sphericalangle ADE) + m(\sphericalangle MDE) = 90°$ rezultă

$$m(\sphericalangle ADE) + m(\sphericalangle MAE) = m(\sphericalangle ADE) + m(\sphericalangle DAM) = 90°,$$

adică $DE \perp AM'$. Analog, $D'E' \perp AM$. □

**Teorema 708** (***Teorema lui Steiner***[17]) *Dacă $AP$ şi $AQ$ sunt două izogonale în raport cu unghiul $\sphericalangle BAC$ al triunghiului $ABC$ şi $P, Q \in BC$, atunci*

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

**Demonstraţie.** Fie $BR \parallel AC, AB \parallel CS, R \in AP, S \in AQ$ (Figura 2.46). Din

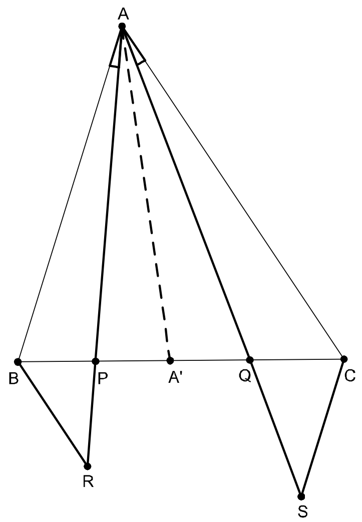


Figura 2.46: Teorema lui Steiner

asemănarea triunghiurilor $BPR$ şi $CPA$; $CSQ$ şi $BAQ$, respectiv $ABR$ şi $ACQ$ obţinem:

$$\frac{CP}{BP} = \frac{AC}{BR}, \frac{CQ}{BQ} = \frac{CS}{AB}, \frac{AB}{AC} = \frac{BR}{CS}.$$

Înmulţind membru cu membru egalităţile precedente obţinem

$$\frac{CP}{BP} \cdot \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

de unde $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. □

**Teorema 709** *Fie $P$ un punct din planul triunghiului $ABC$ şi $d$ o transversală ce trece prin $P$. Izogonalele dreptei $d$ faţă de unghiurile $BPC, CPA$ şi $APB$ intersectează dreptele $BC, CA$ şi $AB$ în trei puncte coliniare $A', B', C'$.*

**Demonstraţie.** Fie $A'', B'', C''$ intersecţiile dreptei $d$ cu laturile triunghiului $ABC$ (Figura 2.47). Din teorema lui Steiner rezultă:

[17] Jacob Steiner (1796-1863) –matematician elveţian, profesor la Universitatea din Berlin, contribuţii în geometrie

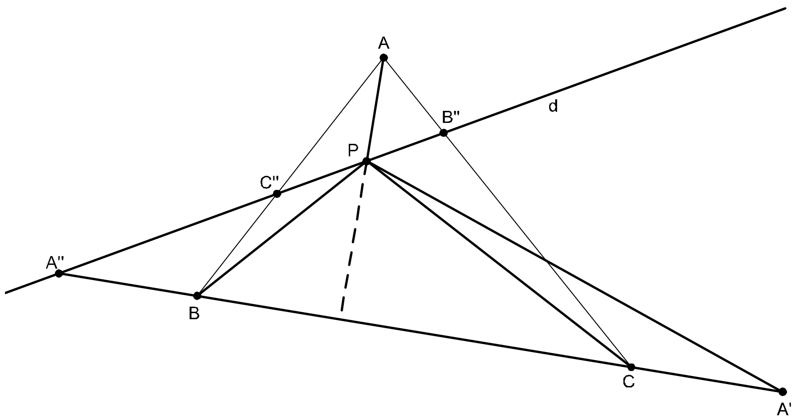


Figura 2.47: Puncte coliniare determinate de izogonale

$$\begin{aligned}\frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{BA'}{CA'} &= \left(\frac{BP}{CP}\right)^2,\\ \frac{AC''}{BC''}\cdot\frac{AC'}{BC'} &= \left(\frac{AP}{BP}\right)^2,\\ \frac{CB''}{AB''}\cdot\frac{CB'}{AB'} &= \left(\frac{CP}{AP}\right)^2.\end{aligned}$$

Înmulţind relaţiile precedente membru cu membru rezultă:

$$\left(\frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{CB''}{AB'}\cdot\frac{AC''}{BC''}\right)\cdot\left(\frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{AC'}{BC'}\right)=\left(\frac{BP}{CP}\right)^2\cdot\left(\frac{AP}{BP}\right)^2\cdot\left(\frac{CP}{AP}\right)^2=1.$$

Din teorema lui Menelaus rezultă $\frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{CB''}{AB'}\cdot\frac{AC''}{BC''}=1$, de unde rezultă

$$\frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{AC'}{BC'}=1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele $A', B', C'$ sunt coliniare. □

**Teorema 710** (***Transversala izogonală a unei drepte***) *O transversală $d$ intersectează dreptele suport ale laturii triunghiului $ABC$ în punctele $A', B'$ şi $C'$. Simetricele dreptelor $AA', BB'$ şi $CC'$ faţă de bisectoarele $AI, BI$, respectiv $CI$ intersectează dreptele $BC, AC$ şi $AB$ în punctele $A$", $B$", respectiv $C$" ce aparţin unei drepte $d'$.*

**Demonstraţie.** Conform teoremei lui Steiner avem (Figura 2.48) :

$$\frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{BA''}{CA''}=\left(\frac{BA}{CA}\right)^2,\ \frac{AC'}{BC'}\cdot\frac{AC''}{BC''}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2,\ \frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{CB''}{AB''}=\left(\frac{CB}{AB}\right)^2.$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile precedente, rezultă

$$\left(\frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{AC'}{BC'}\right)\cdot\left(\frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{CB''}{AB''}\cdot\frac{AC''}{BC''}\right)=1.$$

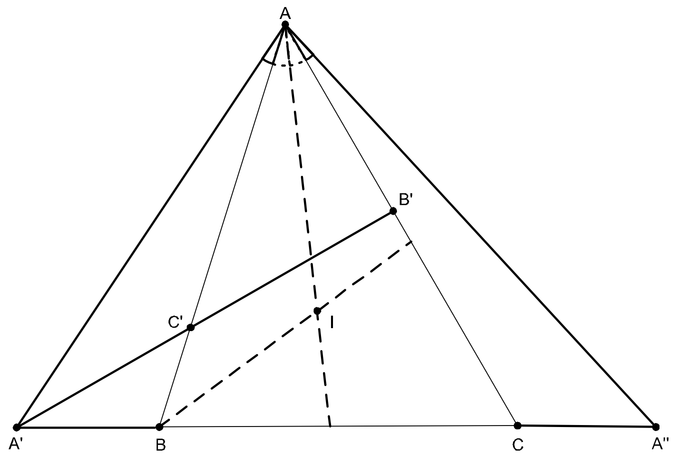


Figura 2.48: Transversala izogonală a unei drepte

Din teorema lui Menelaus în triunghiul $ABC$ rezultă $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$, de unde $\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1$ şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele $A'', B''$ şi $C''$ sunt coliniare. □

**Observaţia 711** *Dreapta $d'$ se numeşte transversala izogonală a dreptei $d$.*

**Teorema 712** *Într-un triunghi izogonalele a trei ceviene concurente sunt la rândul lor concurente.*

**Demonstraţie.** Vezi „Teorema lui Mathieu". □

**Observaţia 713** *Punctul de concurenţă al cevienelor concurente şi punctul de concurenţă al izogonalelor acestora se numesc **puncte izogonale.** Simedianele sunt concurente într-un punct numit **punctul lui Lemoine**[18].*

**Teorema 714** *Izogonalul centrului cercului înscris într-un triunghi este el însuşi.*

**Demonstraţie.** Soluţie evidentă. □

**Teorema 715** *Înălţimea coborâtă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă şi diametrul cercului circumscris triunghiului ce trece prin acel vârf sunt drepte izogonale.*

**Demonstraţie.** Fie $AH_a \perp BC, H_a \in BC$ şi $A'$ punctul diametral opus punctului $A$ în cercul circumscris triunghiului $ABC$ (Figura 2.49). Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle AA'B) &= m(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB}), \\ m(\sphericalangle ABA') &= m(\sphericalangle AH_aC) = 90^\circ, \end{aligned}$$

deci $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle H_aAC$. □

[18] Emile Lemoine (1840-1912) – inginer francez, contribuţii în geometrie

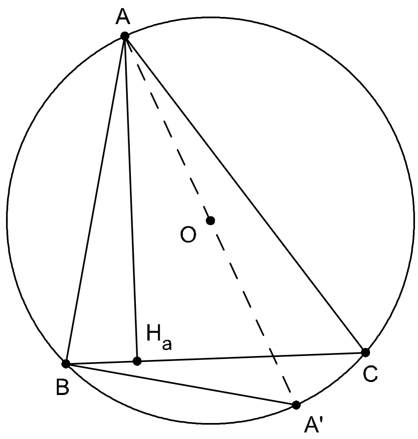


Figura 2.49: Izogonala înălţimii

**Teorema 716** *Într-un triunghi $ABC$, unghiul format de înălţimea şi diametrul cercului circumscris ce pleacă din acelaşi vârf are măsura egală cu diferenţa măsurilor unghiurilor triunghiului din celelalte două vârfuri.*

**Demonstraţie.** $m(\widehat{A'AH_a}) = \left|m(\widehat{A}) - 2[90^\circ - m(\widehat{C})]\right| = \left|m(\widehat{C}) - m(\widehat{B})\right|$. □

**Teorema 717** *Izogonalul ortocentrului unui triunghi este centrul cercului circumscris triunghiului.*

**Demonstraţie.** Din teorema precedentă rezultă concluzia. □

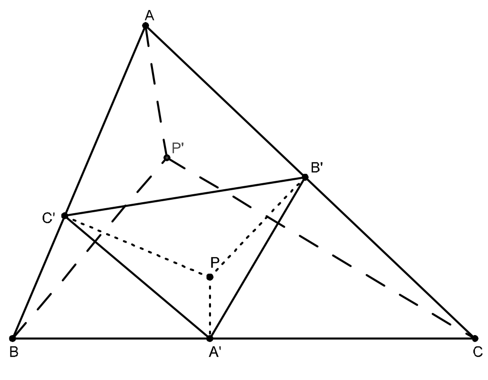


Figura 2.50: Puncte izogonale

**Teorema 718** *Fie $P$ un punct nesituat pe cercul circumscris al unui triunghi $ABC$ şi $A'B'C'$ triunghiul podar al lui $P$ în raport cu triunghiul $ABC$. Perpendicularele din $A, B, C$ pe $B'C', A'C'$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct $P'$, izogonalul punctului $P$ în raport cu triunghiul $ABC$.*

**Demonstraţie.** Triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul $ABC$, centrul acestei ortologii fiind $P$. Conform teoremei de ortologie şi triunghiul $ABC$ este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$, centrul acestei ortologii fie că este punctul $P'$ (Figura 2.50). Patrulaterul $BA'PC'$ fiind inscriptibil rezultă:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle ABP') &= 90^\circ - m(\sphericalangle A'C'B) = 90^\circ - m(\sphericalangle BPA') \\ &= m(\sphericalangle PBA') = m(\sphericalangle PBC), \end{aligned}$$

de unde $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle P'BC$, adică dreptele $BP$ şi $BP'$ sunt izogonale. Analog, se arată că dreptele $AP$ şi $AP'$ sunt izogonale, deci punctele $P$ şi $P'$ sunt izogonale. □

**Teorema 719** *Fie $M$ şi $M'$ două puncte izogonale în raport cu triunghiul ABC, iar $X, Y, Z$ şi $X', Y', Z'$ proiecţiile acestor puncte pe laturile triunghiului $ABC$. Să se arate că: i) dacă din punctele $X, Y, Z$ ca centre descriem cercuri care trec prin punctul $M'$, atunci punctele $A_1, A_2$; $B_1, B_2$; $C_1, C_2$ de intersecţie ale cercurilor cu laturile $BC, CA$, respectiv $AB$ se află pe un cerc cu centrul în $M$. ii) dacă prin punctele $X', Y', Z'$ ca centre descriem cercuri care trec prin punctul $M$, atunci punctele $A_1', A_2'; B_1', B_2'; C_1', C_2'$ de intersecţie ale cercurilor respective cu laturile $BC, CA$ şi $AB$ se află pe un cerc cu centrul în $M'$ şi egal cu precedentul.*

**Demonstraţie.** i) $MA_1^2 = MX^2 + XA_1^2 = MX^2 + XM'^2$ ($XM' = XA_1$ ca raze în acelaşi cerc) (Figura 2.51). Din teorema medianei în triunghiul $XMM'$ rezultă:

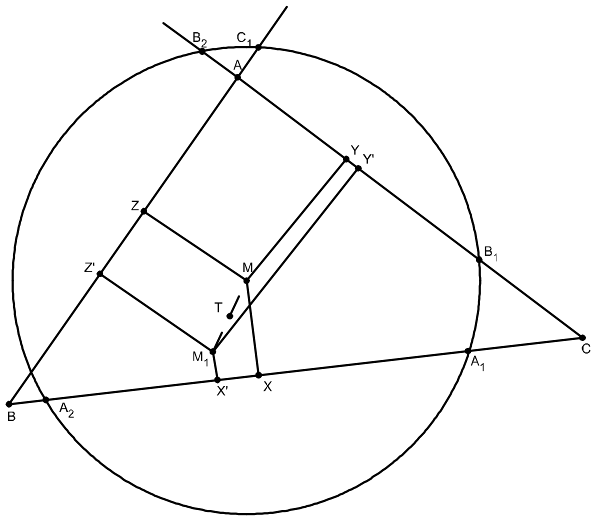


Figura 2.51: Proiecţiile a două puncte izogonale

$$XT^2 = \frac{2(XM^2 + XM'^2) - MM'^2}{4},$$

$T$ fiind mijlocul segmentului $MM'$, de unde $MX^2 + XM'^2 = 2XT^2 + \frac{MM'^2}{2}$, deci $MA_1 = 2XT^2 + \frac{MM'^2}{2}$. Cum $XT = YT = ZT$ rezultă

$$MA_1 = MA_2 = MB_1 = MB_2 = MC_1 = MC_2.$$

ii) Demonstraţie analoagă cu cea de la subpunctul precedent. □

**Teorema 720** *Dacă punctele izogonale $M$ şi $M'$au coordonatele normale $(\alpha, \beta, \gamma)$, respectiv $(\alpha', \beta', \gamma')$, atunci $\alpha \cdot \alpha' = \beta \cdot \beta' = \gamma \cdot \gamma'$.*

**Demonstraţie.** Din teorema 705 rezultă $\alpha \cdot \alpha' = \beta \cdot \beta' = \gamma \cdot \gamma'$. □

**Observaţia 721** *Dacă punctul $M$ este în interiorul (exteriorul) triunghiului, atunci izogonalul său $M'$ va fi în interiorul (exteriorul) triunghiului, deoarece ambele izogonale sunt în interiorul (exteriorul) unui unghi al triunghiului.*

**Teorema 722** *Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$ şi $Q(\alpha', \beta', \gamma')$ două puncte izogonale exprimate în coordonate baricentrice în raport cu un triunghi $ABC$. Atunci,*

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2},$$

*unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor $BC, CA$, respectiv $AB$.*

**Demonstraţie.** Fie$\{P_1\} = AP \cap BC$, $\{P_2\} = BP \cap AC$, $\{P_3\} = PC \cap AB$,

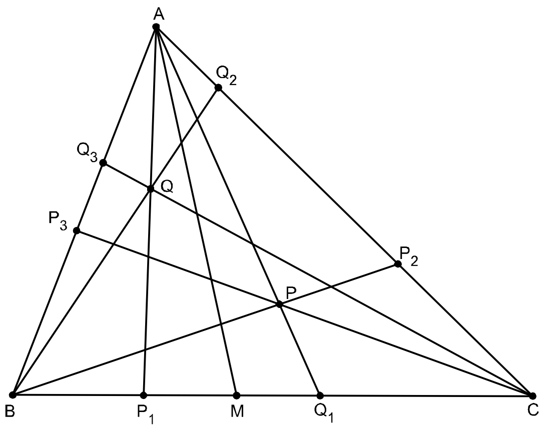


Figura 2.52: Legătura între coordonatele baricentrice a două puncte izogonale

$\{Q_1\} = AQ \cap BC$, $\{Q_2\} = BQ \cap AC$ şi $\{Q_3\} = QC \cap AB$ (Figura 2.52). Avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1B} &= -\frac{\gamma}{\beta}\overrightarrow{P_1C},\ \ \overrightarrow{P_2C} = -\frac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{P_2A},\ \ \overrightarrow{P_3A} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{P_3B}, \\ \overrightarrow{Q_1B} &= -\frac{\gamma'}{\beta'}\overrightarrow{Q_1C},\ \ \overrightarrow{Q_2C} = -\frac{\alpha'}{\gamma'}\overrightarrow{Q_2A},\ \ \overrightarrow{Q_3A} = -\frac{\beta'}{\alpha'}\overrightarrow{Q_3B}. \end{aligned}$$

Din teorema lui Steiner rezultă

$$\frac{P_1B}{P_1C} \cdot \frac{Q_1B}{Q_1C} = \frac{c^2}{b^2}$$

sau $\frac{\gamma\gamma'}{\beta\beta'} = \frac{c^2}{b^2}$, de unde $\frac{\gamma\gamma'}{c^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2}$.Analog, $\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2}$. □

**Teorema 723** *Dacă punctele izogonale $M$ şi $M'$ au coordonatele unghiulare $(\lambda, \mu, \nu)$, respectiv $(\lambda', \mu', \nu')$, atunci $\lambda + \lambda' = 180° + m(\sphericalangle C)$, $\mu + \mu' = 180° + m(\sphericalangle A)$, $\nu + \nu' = 180° + m(\sphericalangle B)$.*

**Demonstraţie.** Fie $M$ în interiorul triunghiului $ABC$ (Figura 2.53). Conform

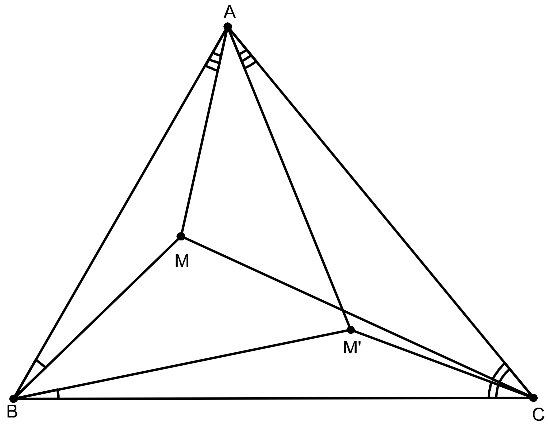


Figura 2.53: Legătura între coordonatele unghiulare a două puncte izogonale

observaţiei precedente, punctul $M'$ va fi situat tot în interiorul triunghiului $ABC$. Avem:

$$\begin{aligned} \mu &= 180° - m(\sphericalangle MBC) - m(\sphericalangle MCB) \\ &= 180° - [m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle MBA)] - [m(\sphericalangle ACB) - m(\sphericalangle MCA)] \\ &= m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle MBA) + m(\sphericalangle MCA) \end{aligned}$$

şi analog $\mu' = 180° - m(\sphericalangle M'BC) - m(\sphericalangle M'CB)$, de unde rezultă că $\mu + \mu' = 180° + m(\sphericalangle A)$. Analog, $\lambda + \lambda' = 180° + m(\sphericalangle C)$ şi $\nu + \nu' = 180° + m(\sphericalangle B)$. □

**Observaţia 724** *Dacă una dintre coordonate are valoare negativă, vom considera suplementul său.*

**Teorema 725** *În triunghiul $ABC$ se consideră izogonalele $AA_1, AA_2$, $(A_1, A_2 \in BC)$. Atunci*

$$\left(\frac{AA_1}{AA_2}\right)^2 = \frac{BA_1 \cdot CA_1}{BA_2 \cdot CA_2}.$$

**Demonstraţie.** Fie$\{A_1'\} = AA_1 \cap BC$, $\{A_2'\} = AA_2 \cap BC$ (Figura 2.54). Avem $\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle CAA_2$. Dar $\sphericalangle A_1'BA_2' \equiv \sphericalangle A_1'CA_2'$, $\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle CAA_2 \equiv \sphericalangle BCA_1' \equiv \sphericalangle CBA_2'$ de unde rezultă că $\triangle\ BCA_1' \equiv\triangle\ BCA_2'$, deci $BA_1' \equiv CA_2'$ (i) Triunghiurile $BA_1A_1'$ şi $CA_1A$ sunt asemenea, rezultă $\frac{BA_1'}{AC} = \frac{BA'}{AA_1}$, de unde $BA_1' = \frac{AC \cdot BA_1}{AA_1}$ (ii). Din asemănarea triunghiurilor $CA_2A_2'$ şi $BA_2A$ rezultă $\frac{CA_2'}{AB} = \frac{CA_2}{AA_2}$, adică $CA_2' = \frac{AB \cdot CA_2}{AA_2}$ (iii). Din relaţiile (i) - (iii) rezultă: $\frac{AC \cdot BA_1}{AA_1} = \frac{AB \cdot CA_2}{AA_2}$ sau

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1 \cdot AA_2}{CA_2 \cdot AA_1} \qquad \text{(iv)}$$

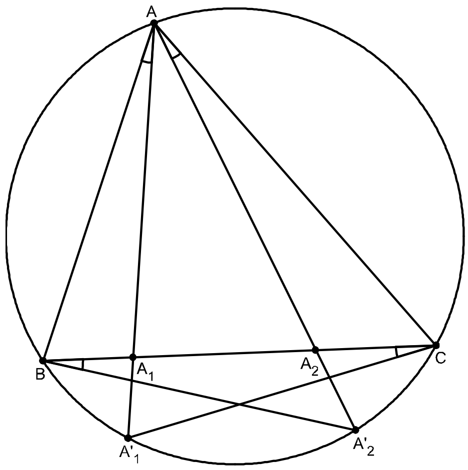


Figura 2.54: $\left(\frac{AA_1}{AA_2}\right)^2 = \frac{BA_1 \cdot CA_1}{BA_2 \cdot CA_2}$

Din relaţia lui Steiner $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BA_2 \cdot BA_1}{CA_2 \cdot CA_1}$ şi relaţia (iv) rezultă $\left(\frac{AA_1}{AA_2}\right)^2 = \frac{BA_1 \cdot CA_1}{BA_2 \cdot CA_2}$. □

**Problem 726** *Lungimea simedianelor triunghiului ABC.*

**Demonstraţie.** Dacă $A_2$ este mijlocul laturii $BC$, atunci $AA_1$ devine simediana corespunzătoare laturii $BC$. Astfel, din relaţia (iv) rezultă $\frac{c}{b} = \frac{2BA_1 \cdot m_a}{a \cdot AA_1}$ sau $AA_1 = \frac{2b \cdot m_a \cdot BA_1}{a \cdot c}$. Din relaţia lui Steiner rezultă $\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{BA_1}{CA_1}$, de unde $BA_1 = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$. Atunci,

$$s_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} \cdot m_a$$

(unde prin $s_a$ am notat lungimea simedianei $AA_1$). Analog, se obţin lungimile celorlalte două simediane, şi anume: $s_b = \frac{2ac}{a^2+c^2} \cdot m_b$ respectiv $s_c = \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot m_c$. □

**Observaţia 727** *Fie triunghiul ABC şi o curbă în planul triunghiului. Curba trasată de izonalul unui punct ce variază pe curba se numeşte* ***transformata izogonală*** *a curbei.*

**Teorema 728** *Transformata izogonală a unui cerc ce trece prin două vârfuri ale triunghiului de referinţă este tot un cerc care trece prin cele două vârfuri ale triunghiului.*

**Demonstraţie.** Fie $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle M'BA) = \alpha$ (Figura 2.55) şi $m(\sphericalangle MCB) = m(\sphericalangle M'CA) = \beta$. Atunci, $m(\sphericalangle M) = \pi - \beta - \alpha$,

$$m(\sphericalangle M') = 180^\circ - (m(\widehat{B}) - \alpha) - (m(\widehat{C}) - \beta) = m(\widehat{A}) + \beta + \alpha,$$

de unde rezultă că $m(\sphericalangle M) + m(\sphericalangle M') = 180^\circ + m(\sphericalangle A)$, deci dacă punctul $M$ descrie un cerc, atunci şi punctul $M'$ descrie un cerc. □

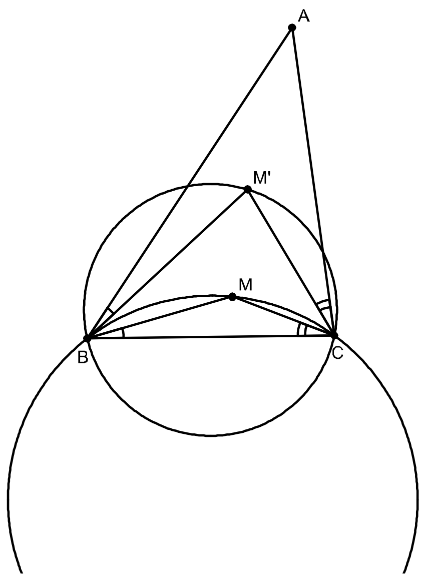


Figura 2.55: Transformata izogonală a unui cerc

**Teorema 729** *În triunghiul $ABC$ se consideră izogonalele $AM$ şi $AN$; $M, N \in BC$, iar cercul circumscris triunghiului $AMN$ intersectează laturile $AB$ şi $AC$ în $E$, respectiv $F$. Dacă $\{X\} = BF \cap CE$ şi $\{P\} = AX \cap BC$, să se arate că pentru orice poziţie a izogonalelor $AM$ şi $AN$, intersecţia bisectoarei unghiului $A$ cu perpendiculara din $P$ pe segmentul $BC$ este un punct fix.*

**Demonstraţie.** Din $\sphericalangle EAM \equiv \sphericalangle FAN$, de unde $m(\widehat{EM}) = m(\widehat{FN})$ şi de aici $EF \parallel MN$. Fie $\{Q\} = AP \cap EF$ (Figura 2.56). Deoarece triunghiurile $AEQ$ şi

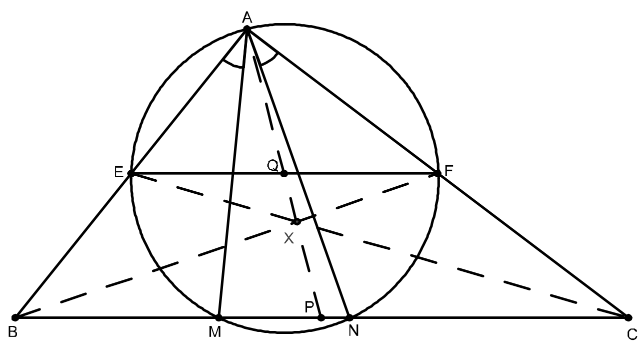


Figura 2.56: Punct fix

$ABP$, respectiv $AFQ$ şi $ACP$ sunt asemenea, rezultă $\frac{EQ}{BP} = \frac{AQ}{AP}$ şi $\frac{FQ}{CP} = \frac{AQ}{AP}$, de unde $\frac{EQ}{BP} = \frac{FQ}{CP}$, deci

$$\frac{EQ}{FQ} = \frac{BP}{CP}. \tag{i}$$

Din asemănarea triunghiurilor $EXQ$ şi $PXC$, respectiv $XQF$ şi $XPB$ rezultă $\frac{EQ}{CP} = \frac{XQ}{XP}$, respectiv $\frac{FQ}{BP} = \frac{XQ}{XP}$, deci $\frac{EQ}{CP} = \frac{FQ}{BP}$, sau

$$\frac{EQ}{FQ} = \frac{CP}{BP}. \qquad \text{(ii)}$$

Din (i) şi (ii) rezultă $\frac{BP}{CP} = \frac{CP}{BP}$, deci $BP = CP$ şi $EQ = FQ$. Perpendiculara în $P$ pe segmentul $BC$ intersectează cercul circumscris triunghiului $ABC$ în mijlocul arcului $\widehat{BC}$, punct prin care mai trece şi bisectoarea unghiului $A$. $\square$

**Teorema 730** *Într-un triunghi $ABC$, dreapta lui Simson a unui punct $M$ este perpendiculară pe izogonala dreptei $AM$.*

**Demonstraţie.** Vezi „Dreapta lui Simson". $\square$

**Teorema 731** *În orice triunghi izogonalele izotomicelor a trei puncte coliniare sunt coliniare.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra proprietatea utilizând coordonatele baricentrice relative. Dacă $X$ este un punct de coordonate $(k_1, k_2, k_3)$ atunci izotomicul său $X'$ are coordonatele $\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}\right)$, iar izogonalul lui $X'$ are coordonatele $X''(a^2k_1, b^2k_2, c^2k_3)$ - rezultă din teorema lui Steiner – ($a, b, c$ fiind lungimile laturilor triunghiului dat). Fie $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $N(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ punctele coliniare. Atunci izogonalele izotomicelor acestor puncte au coordonatele

$$M''(a^2\alpha_1, b^2\alpha_2, c^2\alpha_3), N''(a^2\beta_1, b^2\beta_2, c^2\beta_3), P''(a^2\gamma_1, b^2\gamma_2, c^2\gamma_3).$$

Deoarece sunt coliniare rezultă:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde

$$\begin{vmatrix} a^2\alpha_1 & b^2\alpha_2 & c^2\alpha_3 \\ a^2\beta_1 & b^2\beta_2 & c^2\beta_3 \\ a^2\gamma_1 & b^2\gamma_2 & c^2\gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

adică punctele $M'', N'', P''$ sunt coliniare. $\square$

**Teorema 732** *Într-un triunghi $ABC$, izogonalele punctelor Gergonne $(\Gamma)$ şi centrului antibisector $(Z)$ se află pe aceeaşi dreaptă a punctului lui Lemoine $(K)$ al triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Deoarece punctul lui Nagel $(N)$, iar centrul cercului înscris $(I)$ în triunghiul $ABC$ şi centrul de greutate $(G)$ al triunghiului $ABC$ sunt punctele izotomice ale lui $\Gamma, Z$, respectiv $G$, iar $N, I$ şi $G$ sunt coliniare, atunci – conform proprietăţii precedente - izogonalele punctelor $\Gamma, Z$ şi $G$ sunt coliniare. Cum punctul lui Lemoine este izogonalul centrului de greutate $(G)$ al triunghiului $ABC$ problema este demonstrată. $\square$

**Teorema 733** *Într-un triunghi $ABC$, izogonalele centrului cercului înscris $(I)$, punctului lui Gergonne $(\Gamma)$ şi punctul lui Nagel $(N)$ sunt coliniare.*

**Demonstraţie.** Deoarece centrul antibisector $(Z)$ , $\Gamma$ şi $N$ sunt coliniare (vezi „Antibisectoarea") iar $I, N$ şi $T$ sunt punctele izotomice ale acestora - cf th.731 – rezultă concluzia. □

**Teorema 734** *Într-un triunghi izotomicele izogonalelor a trei puncte coliniare sunt coliniare.*

**Demonstraţie.** Se procedează analoag ca în teorema 731.

**Teorema 735** *Izogonalele a trei drepte care prin vârfurile unui triunghi sunt concurente pe cercul circumscris.*

**Demonstraţie.** Fie $AM$ şi $AA'$ drepte izogonale (punctele $M$ şi $A'$ sunt pe cercul circumscris triunghiului $ABC$). Avem: $m(\widehat{MB}) = m(\widehat{A'C})$ (i). Fie $BB' \parallel AA'$, $B'$ fiind pe cercul circumscris triunghiului $ABC$ (Figura 2.57). Atunci, $m(\widehat{AB}) =$

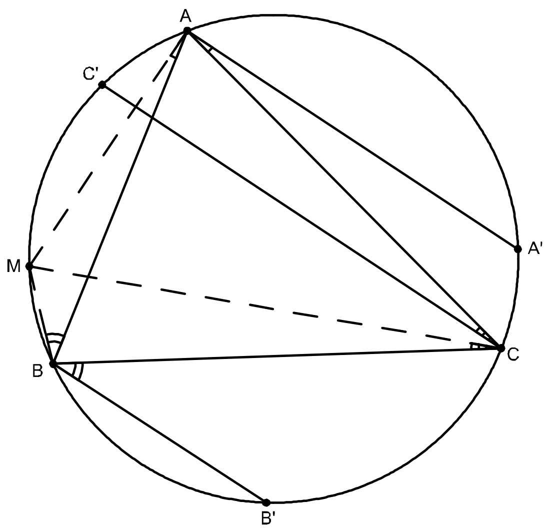


Figura 2.57: Izogonalele a trei drepte

$m(\widehat{A'B'})$, deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{MB}) = m(\widehat{A'C}) + m(\widehat{CB'}) \qquad \text{(ii)}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $m(\widehat{AM}) = m(\widehat{CB'})$, relaţie ce arată că dreptele $BM$ şi $CB'$ sunt izogonale. Analog se arată că paralela dusă prin $C$ la $AA'$ şi dreapta $CM$ sunt izogonale, deci izogonalele dreptelor $AA', BB', CC'$ sunt concurente în punctul $M$ de pe cercul circumscris triunghiului $ABC$. □

**Teorema 736** *Fie* $\mathcal{C}$ *cercul circumscris triunghiului* $ABC$*,* $C'$ *un cerc tangent interior în punctul* $A$ *cercului  care intersectează latura* $BC$ *în punctele* $D$ *şi* $E$*. Dreptele* $AD$ *şi* $AE$ *sunt izogonale în raport cu unghiul* $\sphericalangle BAC$*.*

**Demonstraţie.** Fie $\{D'\} = \mathcal{C} \cap AB$ şi $\{E'\} = C' \cap AC$. Fie $(TA$ tangenta în $A$ la cele două cercuri (Figura 2.58).Avem:

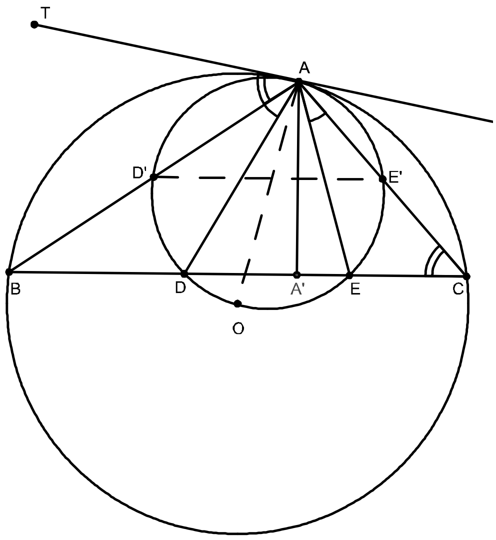


Figura 2.58: Izogonale determinate de cercuri

$$\begin{aligned} m\left(\sphericalangle TAB\right) &= m\left(\sphericalangle ACB\right) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) \\ m(\sphericalangle TAD') &= m(\sphericalangle AE'D) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD'}), \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AE'D'$, adică dreptele $D'E'$ şi $BC$ sunt paralele, deci $D'E' \parallel DE$, adică $m(\widehat{DD'}) = m(\widehat{EE'})$ sau $m(\sphericalangle BAD') = m(\sphericalangle EAE')$, deci dreptele $AD$ şi $AE$ sunt izogonale. □

**Teorema 737** *Cercul care trece prin picioarele unei perechi de drepte izogonale şi prin vârful triunghiului, opus acestuia, este tangent cercului circumscris triunghiului considerat.*

**Demonstraţie.** Fie $O$ şi $O'$ centrele cercurilor $\mathcal{C}$ şi $C'$. Să demonstrăm că cercul circumscris triunghiului $ADE$ este tangent cercului circumscris al triunghiului $ABC$ (Figura 2.58).

Fie $A'$ piciorul înălţimii din $A$ pe latura $BC$. Dreptele $AO$ şi $AA'$ fiind izogonale şi cum $AD$ şi $AE$ sunt izogonale din ipoteză rezultă: $\sphericalangle O'AE \equiv \sphericalangle A'AD$ şi $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle DAC$ care prin sumare dau $\sphericalangle O'AB \equiv \sphericalangle A'AC \equiv \sphericalangle OAB$, adică punctele $O, O'$ şi $A$ sunt coliniare, adică cercul $C'$ este tangent cercului . □

**Teorema 738** *Fie $A_1, B_1, C_1$ punctele de intersecţie ale unei transversale oarecare cu laturile $BC, CA$, respectiv $AB$ ale unui triunghi $ABC$ şi $O_a, O_b, O_c$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB_1C_1, BC_1A_1$, respectiv $CA_1B_1$. Dreptele $AO_a, BO_b$ şi $CO_c$ sunt concurente într-un punct $M$ situat pe cercul circumscris triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Dreapta $AO_a$ şi înălţimea $AA'$ a triunghiului $AB_1C_1$ sunt izo - gonale (Figura 2.59). Analog, $BO_b$ şi înălţimea $BB'$ a triunghiului $BA_1C_1$, $CO_c$ şi

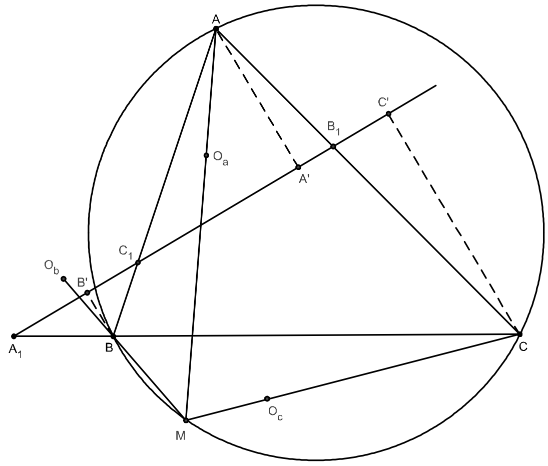


Figura 2.59: Drepte concurente

înălţimea $CC'$ a triunghiului $CA_1B_1$ sunt drepte izogonale. Fie $\{M\} = AO_a \cap CO_c$. Deoarece $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ rezultă $\sphericalangle A'AB_1 \equiv \sphericalangle B_1CC' \equiv \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle MAB$; deci $M$ aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$. Analog, se arată că $O_bB$ trece prin $M$. □

**Teorema 739** *Triunghiul antipodar al unui punct $P$ şi triunghiul podar al izogonalului său $P'$ sunt omotetice.*

**Demonstraţie.** Vezi [12, § III.6]. □

**Observaţia 740** *Fie dreptele $(d_1) : a_1x + b_1y - p_1 = 0, (d_2) : a_2x + b_2y - p_2 = 0$ scrise sub formă normală (deci $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$). O dreaptă $(d)$ care aparţine fasciculului determinat de dreptele $d_1$ şi $d_2$ are ecuaţia*

$$a_1x + b_1y + p_1 + \lambda(a_2x + b_2y + p_2) = 0, \lambda \in R^*.$$

*Panta dreptei $d$ este $m = -\frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_2}$.*

**Teorema 741** *Dacă dreapta $(d)$ are ecuaţia*

$$a_1x + b_1y + p_1 + \lambda(a_2x + b_2y + p_2) = 0 \text{ (cu } a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1)$$

*atunci izogonala sa, dreapta $(d')$, are ecuaţia*

$$a_1x + b_1y + p_1 + \frac{1}{\lambda}(a_2x + b_2y + p_2) = 0.$$

**Demonstraţie.** O dreapta $(d')$ a acestui fascicul de drepte este izogonală dreptei $d$ are ecuaţia

$$a_1x + b_1y + p_1 + \lambda'(a_2x + b_2y + p_2) = 0$$

şi panta $m' = -\frac{a_1+\lambda' a_2}{b_1+\lambda' b_2}$. Fie $\alpha$ şi $\beta$ unghiul dintre dreptele $d$ şi $d_1$ respectiv $d'$ şi $d_2$ (Figura 2.60). Avem:

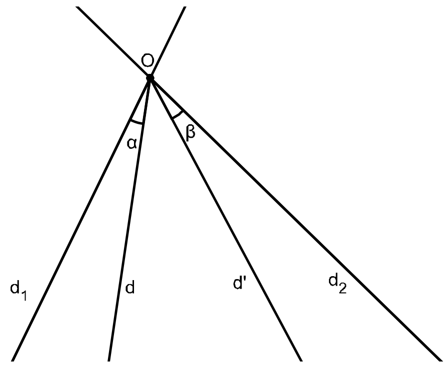


Figura 2.60: Ecuaţia unei izogonale

$$tg\alpha = \frac{-\frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_2} + \frac{a_1}{b_1}}{1 + \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_2}} = \frac{\lambda(a_1b_2 - a_2b_1)}{1 + \lambda(a_1a_2 + b_1b_2)} \quad \text{(i)}$$

$$tg\beta = \frac{-\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_2}}{1 + \frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_2}} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2 + \lambda'} \quad \text{(ii)}$$

deoarece $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$. Drepta $(d')$ este izogonala lui $(d)$ dacă $tg\alpha = tg\beta$ şi din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\lambda = \frac{1}{\lambda'}$. Deci, dacă dreapta $(d)$ are ecuaţia

$$a_1x + b_1y + p_1 + \lambda(a_2x + b_2y + p_2) = 0$$

atunci izogonala sa, dreapta $(d')$, are ecuaţia

$$a_1x + b_1y + p_1 + \frac{1}{\lambda}(a_2x + b_2y + p_2) = 0.$$

□

**Teorema 742** *Fie $M$ un punct pe bisectoarea unghiului $BAC$ a triunghiului $ABC$ şi $M'$ izogonalul conjugat al lui $M$ în raport cu triunghiul $ABC$. Cercul ce trece prin $M, M'$ şi este tangent laturii $BC$ este tangent şi cercului circumscris triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.**Fie că un cerc este tangent interior cercului circumscris triunghiului $ABC$ în $D$ şi tangent laturii $BC$ în punctul $E$, iar $M$ şi $M'$ punctele de intersecţie dintre bisectoarea unghiului $A$ şi cercul C. Dacă $F$, al doilea punct de intersecţie dintre dreapta $DE$ şi cercul circumscris triunghiului $ABC$ (Figura 2.61). Fie $P$ punctul de in-

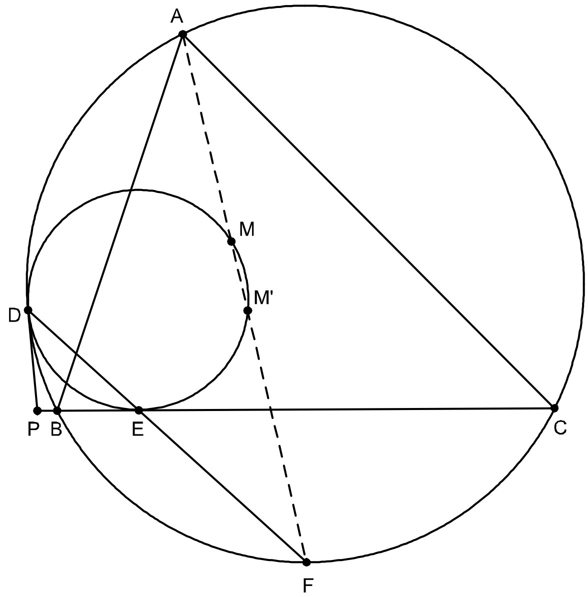


Figura 2.61: Cercuri tangente

tersecţie dintre tangentele duse la cercul în punctele $D$ şi $E$. Atunci, $\sphericalangle PED \equiv \sphericalangle PDE$, adică

$$\frac{1}{2}[m(\widehat{BD}) + m(\widehat{FC})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{BD}) + m(\widehat{BF})],$$

de unde

$$m(\widehat{BF}) = m(\widehat{FC}),\ m(\widehat{BF}) = m(\widehat{FC}),$$

relaţie ce arată că punctele $F, M$ şi $M'$ sunt coliniare. Din puterea punctului faţă de un cerc avem

$$FE \cdot FD = FM \cdot FM' \tag{i}$$

Din asemănarea triunghiurilor $BFE$ şi $DFB$, ($m(\sphericalangle BFD) = m(\sphericalangle BFE)$ şi $m(\sphericalangle FBE) = m(\sphericalangle BDF) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$) rezultă

$$FE \cdot FD = FB^2 \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $FM \cdot FM' = FB^2$, relaţie ce arată că triunghiurile $BFM'$ şi $MFB$ sunt asemenea, deci $\sphericalangle FBM' \equiv \sphericalangle BMF$ (iii). Atunci,

$$m(\sphericalangle FBC) + m(\sphericalangle CBM') = m(\sphericalangle BAF) + m(\sphericalangle MBA),$$

de unde $\sphericalangle CBM' \equiv \sphericalangle MBA$, adică punctele $M$ şi $M'$ sunt izogonal conjugate. □

**Teorema 743** *Ceviana izogonală unei ceviene de rangul $k$ este ceviana de rang $(2-k)$ şi reciproc.*

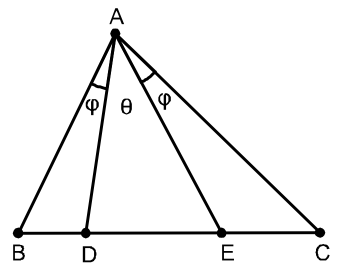


Figura 2.62: Ceviană izogonală de rang $k$

**Demonstraţie.** Fie $AD$ o ceviană de ordinul $k$ în triunghiul $ABC$ şi $AE$ izogonala sa (Figura 2.62), atunci $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k$. Din teorema sinusurilor rezultă:

$$\frac{\sin(\phi+\theta)}{BE} = \frac{\sin B}{AE}, \frac{\sin\phi}{EC} = \frac{\sin C}{AE},$$

de unde

$$\frac{BE}{EC} = \frac{\sin(\phi+\theta)}{\sin\phi} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(\phi+\theta)}{\sin\phi} \cdot \frac{c}{b} \tag{i}$$

Din $\frac{\sin\phi}{BD} = \frac{\sin B}{AD}$ şi $\frac{\sin(\phi+\theta)}{DC} = \frac{\sin C}{AD}$, de unde

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)} \cdot \frac{c}{b} = \left(\frac{c}{b}\right)^k,$$

deci

$$\frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)} = \left(\frac{c}{b}\right)^{k-1}. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă:

$$\frac{BE}{EC} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-1} \cdot \frac{c}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-2} = \left(\frac{c}{b}\right)^{2-k}.$$

□

**Teorema 744** *Fie $AE$ izogonala antibisectoarei $AD$ a triunghiului $ABC$, $E, D \in (BC)$. Atunci,*

$$\frac{BE}{EC} = \left(\frac{c}{b}\right)^3.$$

**Demonstraţie.** Deoarece antibisectoarea este ceviană de rangul $(-1)$ rezultă conform proprietăţii precedente că ceviana izogonală antibisectoarei este ceviana de rang $(2-(-1)) = 3$, deci $\frac{BE}{EC} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$. □

**Teorema 745** *Izogonalele punctelor $F_1$ şi $F_2$ ale lui Fermat sunt punctele izodinamice $S$ şi $S'$ ale triunghiului $ABC$.*

**Demonstraţie.** Vezi „Puncte izodinamice”. □