2.12 IZOGONALE EXTERIOARE

„Specificul meseriei mele, matematica, e că se face oriunde, oricum şi că trebuie să o faci oriunde, oricând şi oricum.” - Grigore Moisil[19]

Două drepte simetrice faţă de bisectoarea unui unghi, situate în exteriorul unghiului şi care trec prin vârful acestuia se numesc ***izogonale exterioare.***

Teorema 746 *Prin fiecare vârf al triunghiului ABC se construiesc izogonalele exterioare Ax şi Ax', By şi By', Cz şi Cz'; fie $\{A_1\} = By \cap Cz'$,$\{B_1\} = Cz \cap AX'$,$\{C_1\} = Ax \cap By'$. Să se arate că triunghiul $A_1B_1C_1$ este omologic cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Fie$\{A'\} = AA_1 \cap BC$,$\{B'\} = BB_1 \cap AC$,$\{C'\} = CC_1 \cap BA$, $m(\sphericalangle BAC_1) = m(\sphericalangle CAB_1) = \alpha$, $m(\sphericalangle ABC_1) = m(\sphericalangle CBA_1) = \beta$, $m(\sphericalangle BCA_1) = m(\sphericalangle ACB_1) = \gamma$ (Figura 2.63). Avem: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}_{[ABA_1]}}{\mathcal{A}_{[ACA_1]}} = \frac{AB \cdot BA_1 \cdot \sin(B+\beta)}{AC \cdot CA_1 \cdot \sin(C+\gamma)}$, $\frac{B'C}{B'A} =$

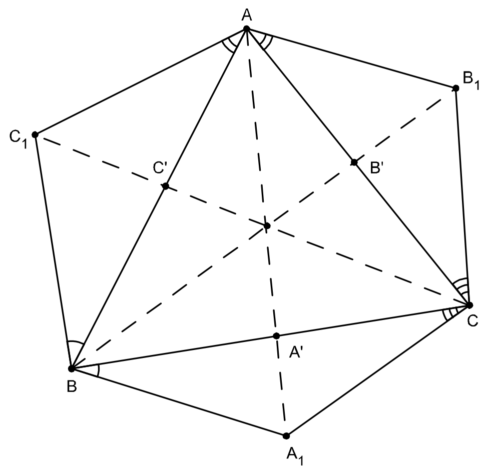

Figura 2.63: Izogonale exterioare

$\frac{BC \cdot CB_1 \cdot \sin(C+\gamma)}{AB \cdot AB_1 \cdot \sin(A+\alpha)}$, $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC \cdot AC_1 \cdot \sin(B+\beta)}{BC \cdot BC_1 \cdot \sin(B+\beta)}$. Înmulţind membru cu membru relaţiile precedente rezultă că:

$$\begin{aligned} \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} &= \left(\frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB}\right) \cdot \left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right) \\ &= \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile BA_1C, AB_1C, AC_1B ne dă :

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad \text{(ii)}$$

[19]Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iaşi, membru al Academiei Române, contribuţii importante în informatică

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt omologice. □

2.13 DREPTELE LUI SCHWATT

„În fiecare ştiinţă este numai atâta ştiinţă adevărată câtă matematică conţine." - Immanuel Kant[20]

Dreptele care conţin mijloacele înălţimilor unui triunghi şi mijloacele laturilor corespunzătoare se numesc ***dreptele lui Schwatt***[21].

Teorema 747 (***Teorema lui Schömilch***) *Dreptele lui Schwatt sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului.*

Demonstraţie. Fie H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor unui triunghi ABC, D, E şi

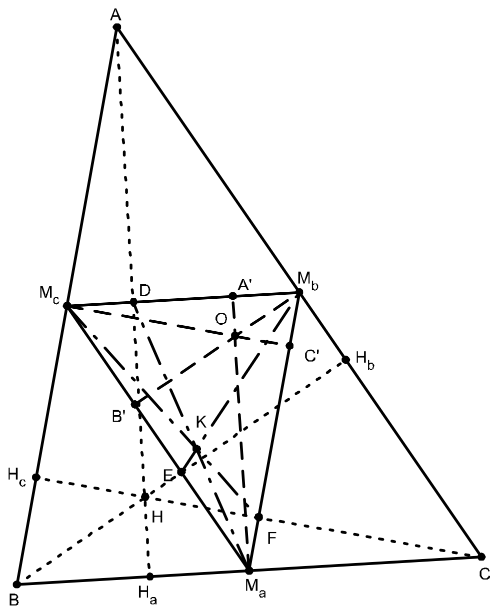

Figura 2.64: Teorema lui Schömilch

F mijloacele înălţimilor AH_a, BH_b, respectiv CH_c, M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB (Figura 2.64); M_aA', M_bB' şi M_cC' înălţimi în triunghiul

[20]Immanuel Kant (1724-1804) – filosof german, profesor la Universitatea din Königsberg
[21]Isaac Schwatt (1867-1934) – profesor la Universitatea din Pennsylvania