Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt omologice. □

2.13 DREPTELE LUI SCHWATT

„În fiecare ştiinţă este numai atâta ştiinţă adevărată câtă matematică conţine." - Immanuel Kant[20]

Dreptele care conţin mijloacele înălţimilor unui triunghi şi mijloacele laturilor corespunzătoare se numesc ***dreptele lui Schwatt***[21].

Teorema 747 (***Teorema lui Schömilch***) *Dreptele lui Schwatt sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului.*

Demonstraţie. Fie H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor unui triunghi ABC, D, E şi

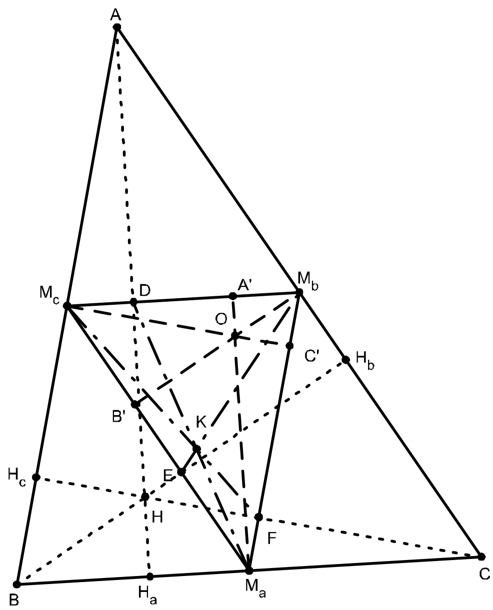

Figura 2.64: Teorema lui Schömilch

F mijloacele înălţimilor AH_a, BH_b, respectiv CH_c, M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB (Figura 2.64); M_aA', M_bB' şi M_cC' înălţimi în triunghiul

[20] Immanuel Kant (1724-1804) – filosof german, profesor la Universitatea din Königsberg
[21] Isaac Schwatt (1867-1934) – profesor la Universitatea din Pennsylvania

$M_aM_bM_c$ (ele sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC) şi $\{O\} = M_aA' \cap M_bB' \cap M_cC'$. Din congruenţa triunghiurilor AM_cD şi $M_aA'M_b$ rezultă că $M_cD \equiv A'M_b$, adică punctele D şi A' sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului M_bM_c. Analog, punctele E şi B' sunt izotomice pe (M_aM_c), F şi C' sunt izotomice pe (M_aM_b). Cum dreptele M_aA', M_bB', M_cC' sunt concurente, rezultă că şi dreptele M_aD, M_bE, M_cF sunt concurente într-un punct K care este izotomicul centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC, în raport cu triunghiul median (vezi „Simediane”), adică K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC. □

Consecinţa 748 *Punctul simedian al unui triunghi dreptunghic este mijlocul înălţimii corespunzătoare ipotenuzei.*

2.14 ORTOPOLUL UNEI DREPTE

„Matematica este ca şi dragostea... o simplă idee, dar poate să devină complicată.” - Robert Drabek[22]

Teorema 749 (***Teorema ortopolului***) *Fie triunghiul ABC şi o dreaptă oarecare d ce nu trece prin vârfurile triunghiului ABC. Fie A_1,B_1,C_1 proiecţiile vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC pe dreapta d. Să se arate că proiecţiile duse din punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, respectiv BA sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie $A_1A_2 \perp BC$, $B_1B_2 \perp AC$ şi $C_1C_2 \perp AB$, $A_2 \in BC$, $B_2 \in AC$,

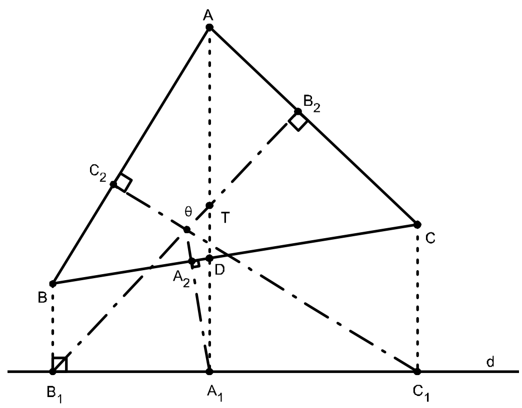

Figura 2.65: Teorema ortopolului

$C_2 \in AB$, $\{\theta\} = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $\{\theta'\} = A_1A_2 \cap C_1C_2 \cap AB$, $\{D\} = AA_1 \cap BC$, $\{E\} =$

[22] Robert Drabek – matematician ceh