$M_aM_bM_c$ (ele sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC) şi $\{O\} = M_aA' \cap M_bB' \cap M_cC'$. Din congruenţa triunghiurilor AM_cD şi $M_aA'M_b$ rezultă că $M_cD \equiv A'M_b$, adică punctele D şi A' sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului M_bM_c. Analog, punctele E şi B' sunt izotomice pe (M_aM_c), F şi C' sunt izotomice pe (M_aM_b). Cum dreptele M_aA', M_bB', M_cC' sunt concurente, rezultă că şi dreptele M_aD, M_bE, M_cF sunt concurente într-un punct K care este izotomicul centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC, în raport cu triunghiul median (vezi „Simediane"), adică K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC. □

Consecinţa 748 *Punctul simedian al unui triunghi dreptunghic este mijlocul înălţimii corespunzătoare ipotenuzei.*

2.14 ORTOPOLUL UNEI DREPTE

„Matematica este ca şi dragostea... o simplă idee, dar poate să devină complicată." - Robert Drabek[22]

Teorema 749 (***Teorema ortopolului***) *Fie triunghiul ABC şi o dreaptă oarecare d ce nu trece prin vârfurile triunghiului ABC. Fie A_1,B_1,C_1 proiecţiile vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC pe dreapta d. Să se arate că proiecţiile duse din punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, respectiv BA sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie $A_1A_2 \perp BC$, $B_1B_2 \perp AC$ şi $C_1C_2 \perp AB$, $A_2 \in BC$, $B_2 \in AC$,

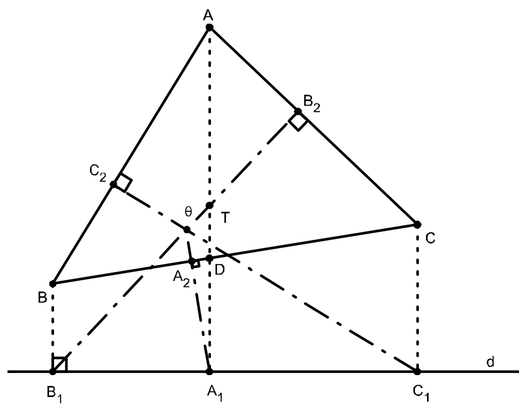

Figura 2.65: Teorema ortopolului

$C_2 \in AB$, $\{\theta\} = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $\{\theta'\} = A_1A_2 \cap C_1C_2 \cap AB$, $\{D\} = AA_1 \cap BC$, $\{E\} =$

[22]Robert Drabek – matematician ceh

$B_1B_2 \cap BC$, $\{T\} = AA_1 \cap B_1B_2$ (Figura 2.65). Din asemănarea triunghiurile ACD şi $B_1\theta A_1$ $((m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{B_1\theta A_1}) = 90° - m(\widehat{B_2EC})$ şi $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{\theta B_1A_1}) = 90° - m(\widehat{ATB_2}))$, avem: $\frac{AD}{CD} = \frac{A_1B_1}{\theta A_1}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor BAD şi $\theta' C_1A_1$ rezultă $\frac{BD}{AD} = \frac{\theta' A_1}{A_1C_1}$. Din faptul că $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ rezultă că punctele θ şi θ' coincid. □

Observaţia 750 *Punctul θ de concurenţă al celor trei perpendiculare se numeşte **ortopolul** dreptei d.*

Teorema 751 *Ortopolii a două drepte paralele între ele în raport cu acelaşi triunghi se află pe dreapta perpendiculară pe cele două drepte, distanţa dintre cei doi ortopoli fiind egală cu distanţa dintre dreptele paralele.*

Demonstraţie. Fie $d' \parallel d''$, θ' şi θ'' ortopolii dreptelor d' şi d'' în raport cu triunghiul ABC (Figura 2.66). Deoarece $d' \parallel d''$, $B'\theta' \parallel B''\theta''$, $C'\theta' \parallel C''\theta'$ rezultă că

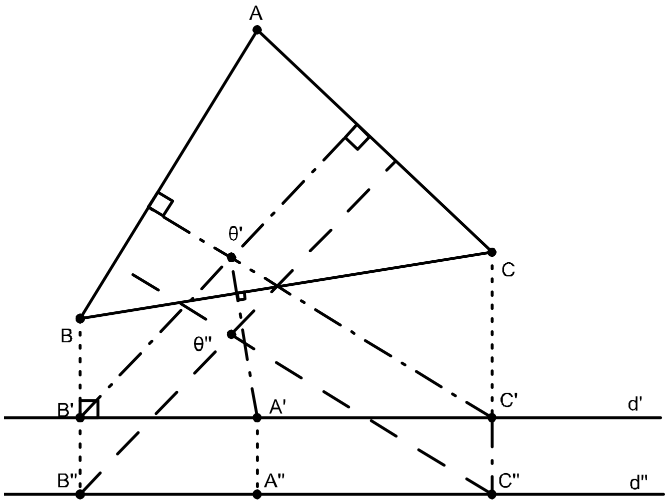

Figura 2.66: Ortopolii a două drepte paralele

triunghiurile $B'\theta' C'$şi $B''\theta'' C''$ sunt omotetice. Cum BB'' şi CC'' sunt perpendiculare pe dreptele paralele d' şi d'', avem că $B'B'' \equiv C'C''$ şi de aici rezultă că triunghiurile $B'\theta' C'$ şi $B''\theta'' C''$ sunt congruente, deci $B'B'' \equiv C'C'' \equiv \theta'\theta''$. □

Fie M şi N intersecţiile unei drepte d cu cercul circumscris triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A', B', C' proiecţiile vârfurilor A, B, C pe dreapta d, M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, R mijlocul segmentului PQ, $(P_a, Q_a), (P_b, Q_b), (P_c, Q_c)$ proiecţiile punctelor P şi Q pe BC, CA, res - pectiv AB. Fie θ ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul ABC.

Teorema 752 *Patrulaterele $B'C'Q_aP_a$, $C'A'P_bQ_b$ şi $A'B'P_cQ_c$ sunt inscriptibile, iar cercurile circumscrise lor se intersectează în ortopolul dreptei d.*

Demonstraţie. Dreptele $B'P_a$ şi CQ sunt paralele, ambele fiind antiparalele cu coarda BP, deci $\sphericalangle P_aB'P \equiv \sphericalangle CQC'$. Patrulaterul $QC'CQ_a$ fiind inscriptibil rezultă $\sphericalangle CQC' \equiv \sphericalangle C'Q_aC$, de unde $\sphericalangle P_aB'C' \equiv \sphericalangle C'Q_aC$, adică patrulaterul $B'C'Q_aP_a$ este inscriptibil. Analog, $C'A'P_bQ_b$ şi $A'B'P_cQ_c$ sunt patrulatere inscriptibile (Figura 2.67). Fie O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise acestor patrulatere. Punctul O_a

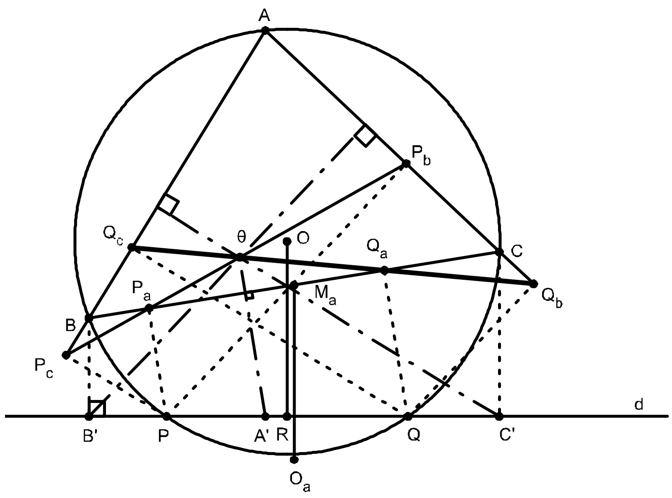

Figura 2.67: Cercuri ce se intersectează în ortopolul unei drepte

aparţine perpendicularei duse în mijlocul segmentului $B'C'$, perpendiculară paralelă cu BB' şi CC'. Atunci, M_a aparţine acestei perpendiculare, deci $M_aO_a \parallel OR$.

Deoarece O_a aparţine şi perpendicularei duse din prin mijlocul segmentului P_aQ_a, perpendiculară ce conţine punctul R şi este paralelă cu OM_a, rezultă că patrulaterul OM_aO_aR este paralelogram, de unde $M_aO_a \equiv OR$ şi $M_aO_a \parallel OR$. Analog, $M_bO_b \equiv OR$, $M_bO_b \parallel OR$ şi $M_cO_c \equiv OR$, $M_cO_c \parallel OR$, deci patrulaterele $O_aO_bM_bM_a$, $O_bO_cM_cM_b$ şi $O_cO_aM_aM_c$ sunt paralelograme, adică laturile triunghiurilor $O_aO_bO_c$ şi $A_1B_1C_1$ sunt respectiv egale şi paralele.

Deoarece $O_aO_b \parallel M_aM_b \parallel AB$ rezultă cercurile circumscrise patrulaterelor $B'C'Q_aP_a$ şi $C'A'P_bQ_b$ (care trec prin C') au axa radicală perpendiculară pe AB, deci axa radicală este chiar perpendiculara dusă din C' pe AB, adică cercurile circumscrise patrulaterelor $B'C'Q_aP_a$, $C'A'P_bQ_b$ şi $A'B'P_cQ_c$ se intersectează în ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul ABC. □

Observaţia 753 *Dacă dreapta d este un diametru în cercul circumscris triunghiului ABC, atunci punctele O_a, O_b, O_c coincid cu punctele M_a, M_b, respectiv M_c.*

Teorema 754 *Triunghiurile $O_aO_bO_c$ şi $M_aM_bM_c$ sunt omotetice şi congruente.*

Demonstraţie. Vezi aplicaţia precedentă. □

Teorema 755 *Triunghiul* $O_aO_bO_c$ *este ortologic cu triunghiul* ABC.

Demonstraţie. Perpendicularele duse din O_a, O_b, O_c pe BC, CA, respectiv AB sunt concurente în R. □

Observaţia 756 *Dacă în loc de trei lungimi egale cu* OR *se consideră pe cele trei perpendiculare duse din* M_a, M_b, M_c *pe* d *trei puncte* A_1, B_1, C_1 *astfel încât* $A_1M_a \equiv B_1M_b \equiv C_1M_c$, *atunci se poate da următoarea generalizare:*

Teorema 757 *Fie* d *o dreaptă în planul triunghiului* ABC, A', B', C' *proiecţiile vârfurilor sale pe* d *şi* M_a, M_b, M_c *mijloacele laturilor* BC, CA, *respectiv* AB. *Pe perpendicularele duse din* A', B', C' *pe dreapta* d *se consideră, în acelaşi sens, punctele* A_1, B_1, *respectiv* C_1 *astfel încât* $A_1M_a \equiv B_1M_b \equiv C_1M_c$. *Cercurile având centrele în punctele* A_1, B_1, *respectiv* C_1 *şi trec prin punctele* $(B', C'), (C', A')$ *respectiv* (A', B') *se intersectează în ortopolul dreptei* d.

Teorema 758 *Ortopolul dreptei aparţine cercului circumscris triunghiului* $O_aO_bO_c$.

Demonstraţie. Soluţia rezultă din reciproca teoremei lui Salmon. □

Teorema 759 *Dacă prin proiecţiile* A', B', C' *ale vârfurilor unui triunghi* ABC, *pe o dreaptă* d, *ducem paralele la laturile triunghiului* ABC, *se formează un triunghi omotetic cu triunghiul* ABC *şi pe al cărui cerc circumscris se află ortopolul dreptei* d *în raport cu triunghiul* ABC.

Demonstraţie. Proprietatea rezultă din faptul că triunghiul format şi triunghiul $O_aO_bO_c$ sunt omotetice, având ortopolul dreptei d drept centru de omotetie. □

Teorema 760 *Dreptele lui Simson ale punctelor* M *şi* N *în raport cu triunghiul* ABC, *trec prin ortopolul dreptei* d.

Demonstraţie. Din patrulaterul inscriptibil $BB'QQ_a$ rezultă $\sphericalangle BQP \equiv \sphericalangle BQ_aB'$, iar în cercul de centru O_a avem $\sphericalangle BQ_aB' \equiv \sphericalangle PC'Q_a$, de unde $\sphericalangle BQP \equiv \sphericalangle PC'Q_a$, deci $BQ \parallel C'P_a$. Cum dreptele $C'\theta$ şi QQ_c sunt paralele, fiind pependiculare pe AB, rezultă că $\sphericalangle P_aQ_a\theta \equiv \sphericalangle Q_aC'\theta \equiv \sphericalangle BQ_aQ_c$, deci dreapta lui Simson a lui Q trece prin ortopolul dreptei d. Analog se arată că dreapta lui Simson a punctului P trece prin ortopolul dreptei d. □

Teorema 761 *Ortopolii a două drepte paralele între ele în raport cu un triunghi aparţin unei drepte a lui Simson.*

Demonstraţie. Fie $d \parallel d'$, θ şi θ'ortopolii dreptelor d şi d' în raport cu triunghiul ABC (Figura 2.68). Fie M şi M' punctele de intersecţie dintre dreapta d cu cercul circumscris triunghiuluiABC. Dreapta $\theta\theta'$ este perpendiculară pe dreptele d şi d' (cf. th. 751). Dreptele lui Simson s_M şi $s_{M'}$ se intersectează în θ (cf. th.760), iar dreptele prpendiculare duse din punctele M şi M' pe dreptele lui Simson $s_{M'}$ şi s_M sunt concurente într-un punct N ce aparţine cercului circumscris triunghiului ABC (vezi [12, § III.22]), triunghiul MNM' fiind un triunghi S în raport cu triunghiul

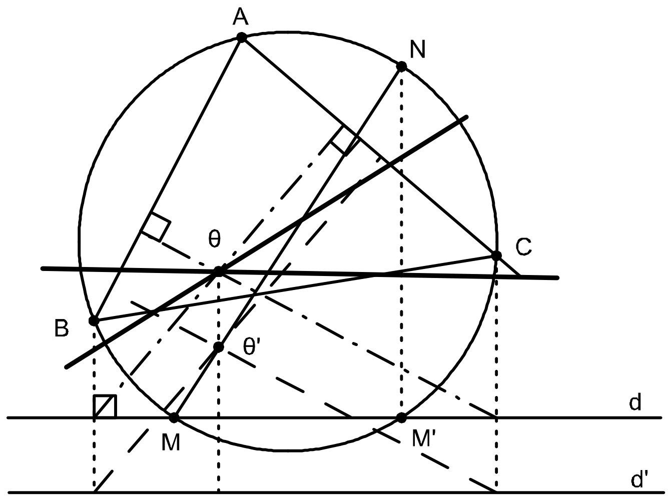

Figura 2.68: Ortopolii a două drepte paralele

ABC. Deoarece într-un triunghi S dreapta lui Simson a unui vârf în raport cu celălalt triunghi este perpendiculară pe latura opusă vârfului considerat (vezi [12, § III.22]) rezultă că dreapta lui Simson a punctului N este perpendiculară pe MM', trece prin punctul comun dreptelor s_M şi $s_{M'}$- adică prin θ - deci şi prin θ'. Am arătat astfel, că dreapta $\theta\theta'$ este dreapta lui Simson a punctului N. □

Teorema 762 *Dacă dreapta d trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci ortopolul dreptei d aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie M şi M' punctele de intersecţie dintre dreapta d cu cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece dreptele lui Simson s_M şi $s_{M'}$ ale punctelor M şi M' se intersectează în ortopolul θ (cf. th. 639), iar punctul de intersecţie al dreptelor lui Simson ale punctelor M şi M', diametral opuse, aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC (vezi „Dreapta lui Simson") rezultă că ortopolul dreptei d aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC. □

Teorema 763 *Proiecţiile vârfurilor triunghiului ABC pe un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC sunt simetricele ortopolului respectiv faţă de laturile triunghiului median al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie MM' un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 2.69). Fie A_1 proiecţiile punctului A pe MM' şi $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC. Punctul A_1 aparţine cercului circumscris triunghiului AM_bM_c având AO drept diametru. Cercul este simetric cercului celor nouă puncte ale triun - ghiului ABC (vezi „Cercul lui Euler"), deci θ simetricul lui A_1 faţă de M_bM_c aparţine cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC. Întrucât ortopolul unui diametru aparţine cercului lui Euler al triunghiului (cf. th. 762), iar ortopolul unei drepte d

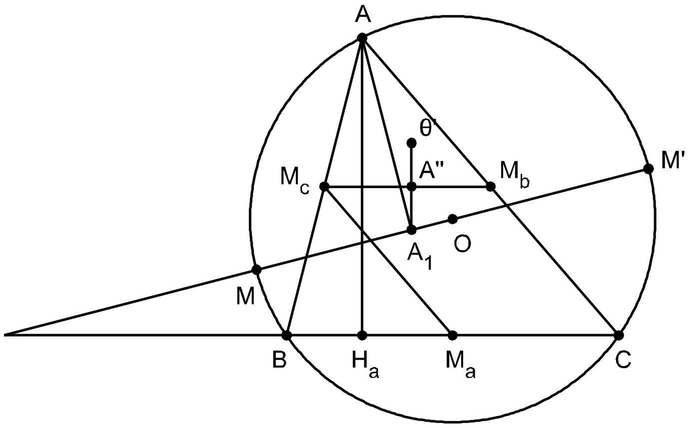

Figura 2.69: Simetricele ortopolului respectiv faţă de laturile triunghiului median

aparţine perpendicularei ridicate din proiecţia (A_1) pe d a unui vârf (A) al triunghiului pe latura opusă rezultă că punctul θ este ortopolul dreptei d. □

Observaţia 764 *Fie B_1 şi C_1 simetricele ortopolului θ faţă de laturile M_aM_c, res - pectiv M_aM_b; deci $\theta B_1 \perp M_aM_c$, $\theta C_1 \perp M_aM_b$, iar θ aparţinând cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC, atunci punctele A'', B'', C'' de intersecţie a dreptelor $\theta A_1, \theta B_1, \theta C_1$ cu laturile triunghiului median determină dreapta lui Simson a punctului θ în raport cu cercul circumscris triunghiului median.*

Teorema 765 *Fie θ ortopolul unui diametru (d) al cercului circumscris triunghiului ABC. Dreapta lui Simson a punctului θ în raport cu triunghiul median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC este paralelă cu dreapta d şi echidistantă de θ şi diametrul d.*

Demonstraţie. Deoarece $A''B''$ este dreapta lui Simson a punctului θ, rezultă - cf. th.639 - că este paralelă cu d şi va trece prin mijlocul distanţei dintre ortopolul θ şi dreapta d. □

Teorema 766 *Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al unui triunghi ABC, θortopolul unui diametru al cercului circumscris triunghiului ABC şi A_1, B_1, C_1 proiecţiile punctelor A, B, respectiv C pe acest diametru. Patrulaterele $AH_aA_1\theta$, $BH_bB_1\theta$, $CH_cC_1\theta$ sunt trapeze isoscele.*

Demonstraţie. Deoarece A_1 şi H_a sunt simetricele punctelor θ, respectiv H_a faţă de latura M_bM_c a triunghiului median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC, rezultă că patrulaterul $AH_aA_1\theta$ este trapez isoscel. □

Observaţia 767 *Distanţa dintre un vârf al unui triunghi ABC şi ortopolul unui diametru al cercului circumscris triunghiului este egală cu distanţa dintre proiecţiile aceluiaşi vârf pe latura opusă şi pe diametru.*

Observaţia 768 *Într-un triunghi ABC, distanţa dintre ortopolul unui diametru al cercului circumscris şi piciorul unei înălţimi este egală cu distanţa dintre vârful din care pleacă înălţimea şi diametrul dat.*

Teorema 769 *Punctul lui Feuerbach al triunghiului ABC este ortopolul diametrului ce trece prin I - centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece ortopolul unei drepte se află la intersecţia dreptelor lui Simson ale celor două puncte unde dreapta intersectează cercul circumscris triun - ghiului ABC, iar dreptele lui Simson ale extremităţilor diametrului ce trece prin I se intersecteză în punctul lui Feuerbach al triunghiului ABC (vezi „Punctele lui Feuerbach"), rezultă concluzia. □

Observaţia 770 *Ortopolul unui diametru al cercului circumscris unui triunghi ABC care trece prin centrul unui cerc tritangent este punctul lui Feuerbach corespunzător.*

Teorema 771 *Ortopolii corespunzători la doi diametri perpendiculari ai cercului circumscris unui triunghi ABC sunt două puncte diametral opuse în cercul lui Euler al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Dacă θ şi θ' sunt ortopolii corespunzători diametrelor perpendiculari d şi d', atunci θ şi θ' sunt puncte pe cercul lui Euler al triunghiului ABC. Dreapta lui Simson d_θ a punctului θ în raport cu triunghiul median este paralelă cu dreapta d', deci $d_\theta \perp d_{\theta'}$. Dacă θ'' este punctul diametral opus lui θ, atunci dreptele lui Simson ale punctelor θ şi θ'' sunt perpendiculare, deci $d_\theta \perp d_{\theta''}$, de unde rezultă că punctele θ''şi θ' coincid. □

Teorema 772 *Fie B_0 şi C_0 punctele diametral opuse vârfurilor B şi C ale unui triunghi ABC, în cercul circumscris acestui triunghi. Ortopolul dreptei B_0C_0 în raport cu triunghiul ABC este punctul A.*

Demonstraţie. Deoarece patrulaterul BCB_0C_0 este dreptunghi, C_0 şi B_0 vor fi

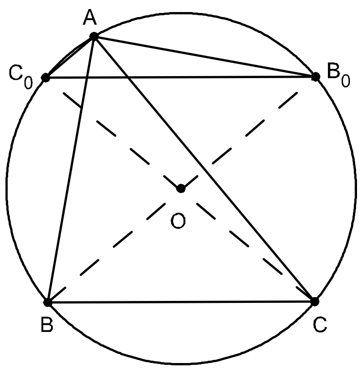

Figura 2.70: Ortopolul dreptei B_0C_0

proiecţiile punctelor B, respectiv C pe dreapta B_0C_0 (Figura 2.70). Cum CC_0 şi BB_0 sunt diametre în cercul circumscris triunghiului ABC rezultă că

$$m(\widehat{C_0AC}) = m(\widehat{B_0AB}) = 90°,$$

adică perpendicularele duse din punctele C_0 şi B_0 pe AC, respectiv AB se intersectează în punctul A care va fi ortopolul dreptei B_0C_0. □

Consecinţa 773 *Ortopolii diametrelor care trec prin vârfurile triunghiului sunt picioarele respective ale înălţimilor.*

Consecinţa 774 *Ortopolul unei laturi este ortocentrul triunghiului.*

Consecinţa 775 *Ortopolul unui diametru paralel cu o latură, se află în punctul eulerian al înălţimii care cade pe latura respectivă.*

Consecinţa 776 *Ortopolul unui diametru paralel cu o înălţime se află în mijlocul laturii pe care cade înălţimea respectivă.*

Teorema 777 *Fie MN coardă a cercului circumscris unui triunghi ABC, perpendiculară pe latura BC. Distanţa dintre ortopolii θ_M şi θ_N ai dreptelor AM, respectiv AN în raport cu triunghiul ABC este egală cu MN.*

Demonstraţie. Fie $\{P\} = MN \cap BC$. Ortopolii θ_M şi θ_N sunt punctele de intersecţie dintre înălţimea din A (dreapta lui Simson a punctului A) şi dreptele lui Simson ale punctelor M, respectiv N (Figura 2.71).

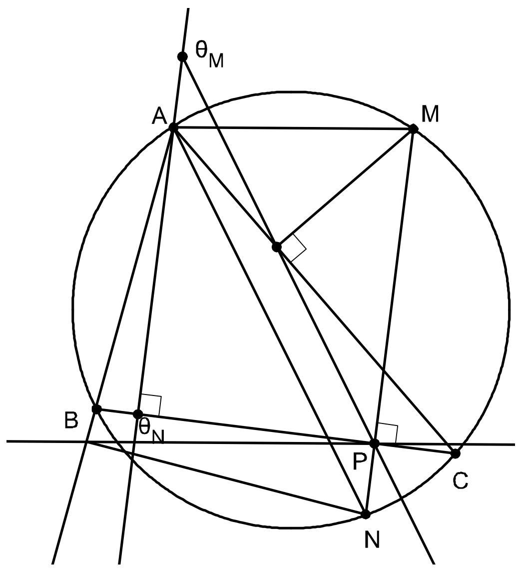

Figura 2.71: Distanţa dintre ortopolii a două drepte

Dreptele lui Simson ale punctelor M şi N sunt paralelele duse prin P la AN, respectiv AM, deci patrulaterele $PNA\theta_M$ şi $A\theta_N CM$ sunt paralelograme. Atunci, $A\theta_M \equiv PN$ şi $A\theta_N \equiv MP$, de unde rezultă

$$A\theta_M + A\theta_N = PN + PM,$$

adică $\theta_N\theta_M \equiv NM$. □

Teorema 778 *Distanţa dintre ortopolii celor două bisectoare ale unui unghi al triunghiului ABC este egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi teorema 777. □

Teorema 779 *Ortopolul unei drepte în raport cu un triunghi coincide cu centrul ra - dical al cercurilor având centrele în vârfurile triunghiului anticomplementar şi tangente la dreapta dată.*

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC, A_1, B_1, C_1 şi A'', B'', C'' proiecţiile punctelor A, B, C respectiv A', B', C' pe dreapta d, iar θ ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul ABC (Figura 2.72). Dar A'', B'', C'' sunt punctele de tangenţă dintre cecurile având centrele în A', B', C' şi dreapta d, iar axele radicale dintre aceste cercuri luate câte două se obţin

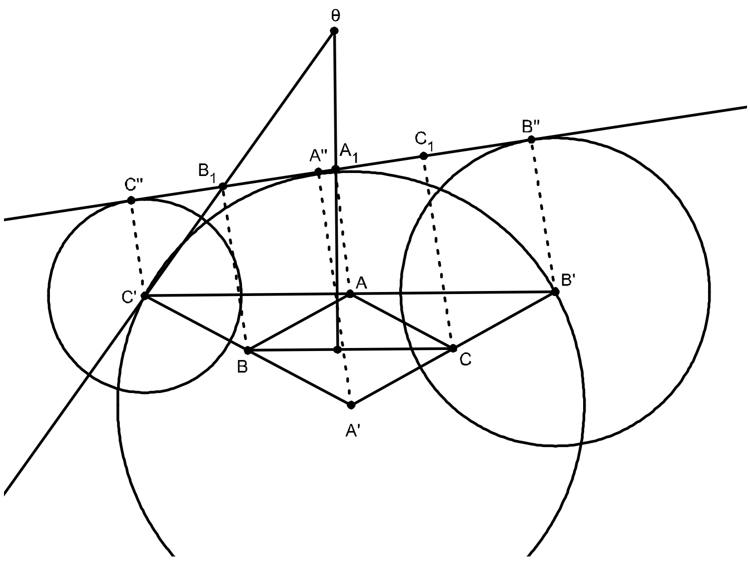

Figura 2.72: Ortopolul unei drepte

ducând perpendiculare din mijloacele segmentelor $A''B'', B''C'', C''A''$ pe linia centrelor $A'B', B'C'$, respectiv $C'A'$, intersecţia acestor axe fiind centrul radical al acestor cercuri. Deoarece mijloacele segmentelor $B''C'', C''A'', A''B''$ sunt punctele A_1, B_1, respectiv C_1, iar perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe $B'C', A'C'$, respectiv $A'B'$ sunt perpendiculare BC, CA, respectiv AB (pentru că $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$ şi $A'B' \parallel AB$), deci sunt concurente în ortopolul θ, rezultă concluzia. □