2.16 ANTIBISECTOAREA

„Ideile, ca şi plantele, au epoca lor, în care apar în diverse locuri,la fel cum primăvara ghioceii răsar pretutindeni unde luminează soarele.” – János Bolyai[24]

Dreptele izotomice ale bisectoarelor interioare sau exterioare ale unui triunghi se numesc ***antibisectoarele*** interioare sau exterioare ale triunghiului.

Teorema 782 *Antibisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' bisectoarele triunghiului ABC şi AZ_1, BZ_2, CZ_3 antibisectoarele triunghiului ABC (Figura 2.74). Evident, $BZ_1 \equiv CA'$, $CZ_1 \equiv$

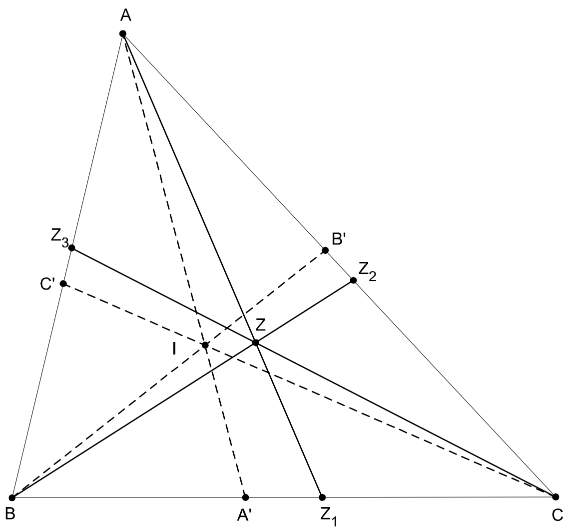

Figura 2.74: Antibisectoarea

BA', $AZ_2 \equiv CB'$, $CZ_2 \equiv AB'$, $AZ_3 \equiv BC'$, $BZ_3 \equiv AC'$. Deoarece bisectoarele sunt concurente, din teorema lui Ceva rezultă

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

sau

$$\frac{CZ_1}{BZ_1} \cdot \frac{BZ_3}{AZ_3} \cdot \frac{AZ_2}{CZ_2} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că antibisectoarele sunt concurente. □

Punctul de concurenţă al antibisectoarelor îl vom nota cu Z şi îl vom numi ***centrul antibisector interior*** al triunghiului ABC.

[24]János Bolyai (1802-1860) – matematician român, de origine maghiară, contribuţii fundamentale în geometrie

Teorema 783 *Centrul cercului înscris I şi centrul antibisector Z al triunghiului ABC sunt puncte izotomice.*

Demonstraţie. Vezi teorema 782. □

Observaţia 784 *Antibisectoarea este o ceviană de rang (-1), deoarece $\frac{BZ_1}{Z_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^{-1}$.*

Teorema 785 *Două antibisectoare exterioare şi o antibisectoare interioară sunt concurente.*

Demonstraţie. Deoarece izotomicele acestor trei drepte, adică două bisectoare exterioare şi bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi trec printr-unul dintre centrele cercurilor exînscrise. □

Observaţia 786 *Punctele de intersecţie dintre trei antibisectoare ale triunghiului se numesc* ***centre antibisectoare.*** *Un triunghi are patru centre antibisectoare, unul interior (Z) şi trei exterioare.*

Observaţia 787 *Centrele antibisectoare ale triunghiului sunt punctele conjugate izotomic ale centrului cercului înscris şi a centrelor cercurilor exînscrise.*

Teorema 788 *Antibisectoarele interioare ale unui triunghi trec prin picioarele bisectoarelor triunghiului median.*

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' bisectoarele triunghiului ABC şi AZ_1, BZ_2, CZ_3 antibisectoarele interioare ale triunghiului ABC, $M_aM_bM_c$ triunghiul său median, $\{A''\} = AA' \cap M_bM_c$, $\{Z_1'\} = AZ_1 \cap M_bM_c$. Deoarece

$$A'M_a = Z_1M_a = \frac{1}{2}A'Z_1$$

şi

$$AA'' = A'A'' = \frac{1}{2}AA',$$

rezultă $A''Z' = A'M_a = Z_1M_a$, deci dreptele AA' şi M_aZ' sunt paralele, adică dreapta M_aZ' este o bisectoare a triunghiului median. □

Teorema 789 *Într-un triunghi ABC, izogonalele centrului antibisector Z şi punctului lui Gergonne Γse află pe aceeaşi dreaptă cu punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § II.15]. □

Teorema 790 *Fie M un punct din planul unui triunghi ABC şi Z centrul antibisector al triunghiului ABC. Atunci:*

$$\overrightarrow{MZ} = \frac{bc\overrightarrow{MA} + ca\overrightarrow{MB} + ab\overrightarrow{MC}}{ab + bc + ca},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB.

Demonstraţie. Vezi [12, § II.15]. □

Teorema 791 *Fie M un punct din planul unui triunghi ABC şi Z centrul antibisector al triunghiului ABC. Atunci:*

$$MZ^2 = \frac{bcMA^2 + caMB^2 + abMC^2}{ab+bc+ca} - \frac{abc(a^3+b^3+c^3)}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.15]. □

Teorema 792 *Fie O centrul cercului circumscris al triunghiului ABC şi Z centrul său antibisector. Atunci:*

$$OZ^2 = R^2 - \frac{abc(a^3+b^3+c^3)}{(ab+bc+ca)^2},$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstraţie. În relaţia demonstrată în aplicaţia precedentă considerăm $M \equiv O$ şi obţinem concluzia. □

Teorema 793 *În triunghiul ABC fie $M \in (AB), N \in (AC)$. Dreapta MN trece prin centrul antibisector Z al triunghiului ABC dacă şi numai dacă:*

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{MA}{MA} + \frac{1}{c}\cdot\frac{NC}{NA} = \frac{1}{a}.$$

Demonstraţie. Vezi [12, § II.15]. □

Teorema 794 *Centrul antibisector Z, punctul lui Gergonne Γ şi punctul lui Nagel N sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 795 *Dacă Z este centrul antibisector al triunghiului ABC, iar x, y, z distanţele de la Z la laturile BC, CA, respectiv AB, atunci:*

$$x = \frac{a^{-1}h_a}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}},\ y = \frac{b^{-1}h_b}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}},\ z = \frac{c^{-1}h_c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$$

(*unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor triunghiului ABC*).

Demonstraţie. Deoarece antibisectoarele sunt ceviene de rang (-1) atunci

$$x = \frac{2a^{-1}A_{[ABC]}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}} = \frac{a^{-1}h_a}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$$

(vezi [12, § II.15]). Analog se arată şi celelalte două egalităţi. □

Teorema 796 *Fie Z centrul antibisector al triunghiului ABC. Prin Z se duc paralelele la laturile triunghiului ABC : $M_1M_4 \parallel AB$, $M_6M_3 \parallel BC$, $M_2M_5 \parallel AC$ ($M_1, M_2 \in BC$; $M_3, M_4 \in AC$; $M_5, M_6 \in AB$). Atunci, $M_1M_2 \equiv M_3M_4 \equiv M_5M_6$.*

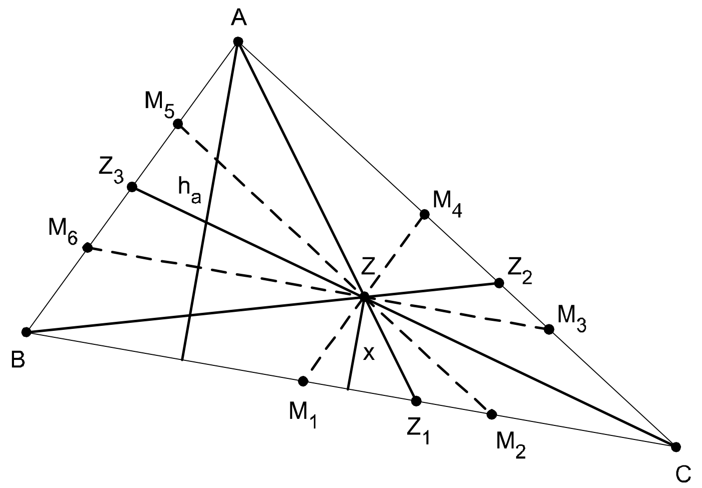

Figura 2.75: Paralele la laturi duse prin centrul antibisector

Demonstraţie. Fie x distanţa de la Z la latura BC (Figura 2.75). Avem

$$\frac{M_1M_2}{a}=\frac{x}{h_a}=\frac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}},$$

sau

$$M_1M_2=\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}.$$

Analog se demonstrează că $M_3M_4\equiv M_5M_6\left(=\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}\right)$. □

Teorema 797 *Fie AE izogonala antibisectoarei AD a triunghiului ABC, $E,D\in(BC)$. Atunci, $\frac{BE}{EC}=\left(\frac{c}{b}\right)^3$.*

Demonstraţie. Vezi „Drepte izogonale”. □

Teorema 798 *Fie Z_a,Z_b,Z_c proiecţiile centrului antibisector (Z) al triunghiului ABC pe laturile BC,CA, respectiv AB. Atunci,*

$$\frac{ZZ_a}{a^{-2}}=\frac{ZZ_b}{b^{-2}}=\frac{ZZ_c}{c^{-2}}.$$

Demonstraţie. Antibisectoarea este o ceviană de rang (-1) şi rezultă $\frac{ZZ_a}{a^{-2}}=\frac{ZZ_b}{b^{-2}}=\frac{ZZ_c}{c^{-2}}$ (vezi [12, § II.15]). □

Teorema 799 *Fie AZ_1,BZ_2 şi CZ_3 antibisectoare în triunghiul ABC, Z centrul său antibisector, $A'\in(AZ_1),B'\in(BZ_2),C'\in(CZ_3)$ astfel încât $AA'\equiv ZZ_1,BB'\equiv ZZ_2,CC'\equiv ZZ_3$. Prin punctele A',B',C' ducem respectiv paralelele M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 la laturile BC, CA, AB. Patrulaterul $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ este hexagon regulat.*

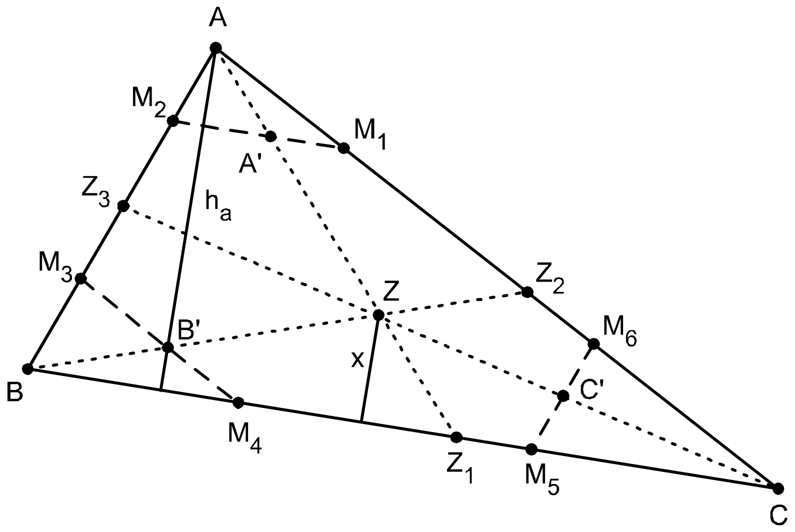

Figura 2.76: Hexagon regulat

Demonstraţie. Fie x, y, z lungimile distanţelor de la Z la laturile BC, CA, respectiv AB, iar h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor triunghiului ABC (Figura 2.76). Avem:

$$\frac{x}{h_a} = \frac{ZZ_1}{AZ_1} = \frac{AA'}{AZ_1} = \frac{M_1M_2}{a}$$

şi deoarece $\frac{x}{h_a} = \frac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$, rezultă $\frac{M_1M_2}{a} = \frac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$, adică

$$M_1M_2 = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}.$$

Analog se arată că $M_3M_4 \equiv M_5M_6 \left(= \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}\right)$. Din asemănarea triunghiurilor ABC şi M_3BM_4 rezultă:

$$\frac{a}{BM_4} = \frac{BZ_2}{BB'} = \frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}{b^{-1}}$$

de unde $BM_4 = \frac{ab^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$. Analog se arată că $CM_5 = \frac{ac^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$, de unde rezultă că

$$M_4M_5 = a - \frac{ab^{-1}}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} - \frac{ac^{-1}}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}.$$

Analog, se arată că $M_1M_6 \equiv M_2M_3 \left(= \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}\right)$, deci hexagonul $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ este regulat. □