1.3 CENTRUL CERCULUI ÎNSCRIS ÎNTR-UN TRIUNGHI

„Matematica nu deţine adevărul absolut, ci doar frumuseţea supremă – o frumuseţe rece şi austeră, ca a o sculptură având o puritate sublimă capabilă de a atinge perfecţiunea.” – Bertrand Russell[3]

Teorema 42 *Bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC şi A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B, C iar $\{I\} = BB' \cap CC'$ (Figura 1.8).Fie C_a, C_b, C_c proiecţiile punctului

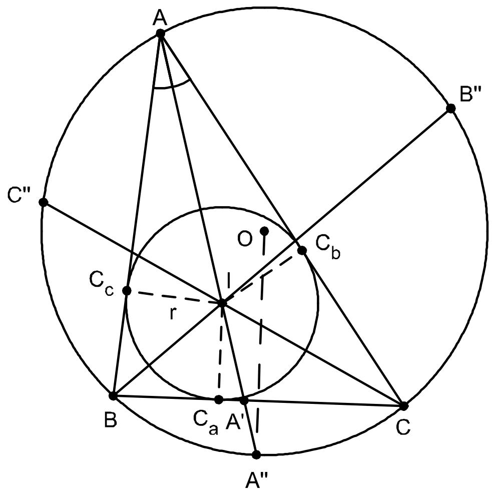

Figura 1.8: Concurenţa bisectoarelor

I pe laturile BC, CA, AB. Din congruenţa triunghiurilor BC_aI cu BC_cI, respectiv CC_aI cu CC_bI rezultă că $C_aI \equiv C_cI$ şi $C_aI \equiv C_bI$, de unde rezultă $C_cI \equiv C_bI$ adică punctul I aparţine şi bisectoarei AA'. □

Observaţia 43 *Deoarece punctul I se află la egală distanţă faţă de laturile triunghiului ABC, atunci este centrul unui cerc tangent interior laturilor triunghiului ABC - cercul se numeşte* ***cercul înscris în triunghiul*** *ABC. Punctul I de concurenţă al bisectoarelor interioare unghiurilor triunghiului ABC se numeşte* ***centrul cercului înscris în triunghiul*** *ABC. Raza cercului înscris în triunghiul ABC o vom nota cu r. Triunghiul $C_aC_bC_c$ ale cărui vârfuri sunt punctele de tangenţă dintre laturile triunghiului şi cercul înscris se numeşte* ***triunghiul de contact al triunghiului*** *ABC.*

[3]Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician şi matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

Teorema 44 *Distanţele de la centrul cercului înscris într-un triunghi la laturile triunghiului sunt egale cu raza cercului înscris în acest triunghi.*

Teorema 45 *Distanţele de la centrul cercului înscris într-un triunghi la vârfurile triunghiului sunt egale cu*

$$\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\ \frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\ \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Demonstraţie. Din triunghiul AIC_c rezultă $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; analog $BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$ şi $CI = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$. □

Teorema 46 *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Atunci, $AI = 4R\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.*

Demonstraţie. Avem

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Analog, $BI = 4R\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$ şi $CI = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$. □

Teorema 47 *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci $m(\sphericalangle BIC) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$, $m(\sphericalangle AIB) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle ACB)$ şi $m(\sphericalangle CIA) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)$.*

Demonstraţie. Avem:

$$m(\sphericalangle BIC) = m(\sphericalangle BIA') + m(\sphericalangle A'IC) =$$

$$[m(\sphericalangle BAI) + m(\sphericalangle ABI)] + [m(\sphericalangle CAI) + m(\sphericalangle ICA)] =$$

$$m(\sphericalangle BAC) + \frac{1}{2}[m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)] = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC).$$

Analog se determină şi măsurile celorlalte două unghiuri. □

Teorema 48 *Fie ABC un triunghi de laturi a, b, respectiv c, I centrul cercului înscris în triunghi şi M un punct din planul triunghiului. Atunci:*

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}.$$

Demonstraţie. Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$, de unde $\overrightarrow{MA'} = \frac{b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{b+c}$. Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului $AA'C$ şi transversalei $B-I-B'$ dă:

$$\frac{AI}{IA'}\cdot\frac{A'B}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1,$$

de unde rezultă că $\frac{AI}{IA'} = \frac{b+c}{a}$. Atunci,

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{MA} + \frac{b+c}{a}\overrightarrow{MD}}{1+\frac{b+c}{a}} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}.$$

□

Consecinţa 49 *Coordonatele baricentrice ale centrului cercului însris în triunghiul* ABC *sunt* $\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$.

Teorema 50 *Fie* z_A, z_B, z_C *afixele vârfurilor* A, B, C *ale triunghiului* ABC *de laturi* a, b, c. *Afixul centrului cercului înscris este egal cu*

$$z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}.$$

Demonstraţie. Alegem un sistem cartezian cu originea în punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 1.9). Din teorema bisectoarei avem: $\frac{c}{b} = \frac{BA'}{A'C}$ sau $\frac{c}{b+c} = \frac{BA'}{BC}$, deci $BA' = \frac{ac}{b+c}$, de unde rezultă că $z_{A'} = \frac{z_B + \frac{c}{b} z_C}{1+\frac{c}{b}}$. Teorema

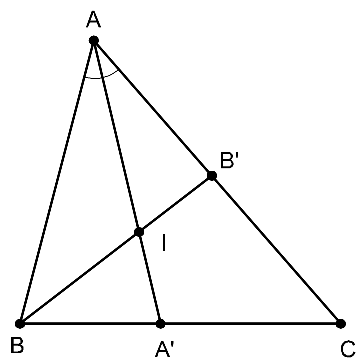

Figura 1.9: Afixul centrului cercului înscris

bisectoarei aplicată în triunghiul ABA' pentru bisectoarea BI ne dă: $\frac{AB}{BA'} = \frac{IA}{IA'}$ sau $\frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a}$, deci

$$z_I = \frac{z_A + \frac{b+c}{a} \cdot z_{A'}}{1 + \frac{b+c}{a}} = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}.$$

□

Teorema 51 *Dacă* $C_aC_bC_c$ *este triunghiul de contact al triunghiului* ABC, *atunci*

$$AC_b = AC_c = p-a, BC_a = BC_c = p-b, CC_a = CC_b = p-c,$$

unde a, b, c *sunt lungimile laturilor* BC, AC, BA, *iar* $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Demonstraţie. Evident $AC_b = AC_c = x, BC_a = BC_c = y, CC_a = CC_b = z$, de unde rezultă că $2(x+y+z) = a+b+c = 2p$, deci $p = x+y+z$. Cum $y+z = a, z+x = b$, rezultă $x = p-a, y-p-b, z = p-c$. □

Teorema 52 *Dacă* r *este raza cercului înscris în triunghiul* ABC, *atunci:*

$$r = \frac{p-a}{ctg\frac{A}{2}} = \frac{p-b}{ctg\frac{B}{2}} = \frac{p-c}{ctg\frac{C}{2}}.$$

Demonstraţie. Din triunghiul dreptunghic AIC_b rezultă $ctg\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}$. Analog se obţin şi celelalte două egalităţi. $\square$

Teorema 53 *În orice triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$p = r \cdot ctg\frac{A}{2} \cdot ctg\frac{B}{2} \cdot ctg\frac{C}{2}.$$

Demonstraţie. $p-a+p-b+p-c = r\left(ctg\frac{A}{2} + ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2}\right) = r\cdot ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\cdot ctg\frac{C}{2}$. $\square$

Teorema 54 *Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, R raza cercului circumscris triunghiului ABC şi r raza cercului înscris în acest triunghi, atunci*

$$IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Demonstraţie. Fie A'' al doilea punct de intersecţie dintre dreapta AI şi cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.8). Utilizând puterea punctului I faţă de cercul circumscris triunghiului ABC, avem:

$$AI \cdot IA'' = (R + IO)(R - IO) = R^2 - IO^2,$$

adică $IO^2 = R^2 - AI \cdot IA''$ (i). Din triunghiul AIC_c rezultă $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ (ii). Avem :

$$m(\sphericalangle BIA'') = m(\sphericalangle IAB) + m(\sphericalangle IBA) = \frac{1}{2}\left[m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)\right]$$

şi

$$m(\sphericalangle IBA'') = \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle CBA'') = \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle A''AC) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle A).$$

Din teorema sinusurilor în triunghiul ABA'' rezultă $BA'' = 2R\sin\frac{A}{2}$, adică $IA'' = 2R\sin\frac{A}{2}$ (iii). Din relaţiile (i), (ii) şi (iii) rezultă $IO^2 = R^2 - 2Rr$. $\square$

Observaţia 55

1) $OI^2 = R^2 - 2Rr$ se numeşte ***relaţia lui Euler***.
2) Deoarece $OI^2 \geq 0$ rezultă $R^2 \geq 2Rr$, adică $R \geq 2r$ (***inegalitatea lui Euler***).
3) Egalitatea $R = 2r$ are loc numai pentru triunghiul echilateral.
4) Relaţia lui Euler poate fi scrisă şi astfel:

$$\frac{r}{R - OI} + \frac{r}{R + OI} = 1.$$

Teorema 56 *Fie I centrul cercului înscris şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci:*

$$IG^2 = \frac{p^2 - 16Rr + 5r^2}{9}$$

(*unde p este semiperimetrul triunghiului ABC; R şi r sunt razele cercului circumscris, respectiv a cercului înscris în triunghiul ABC*).

Demonstraţie. Din relaţia $MI^2 = \frac{aMA^2+bMB^2+cMC^2-abc}{a+b+c}$ (vezi [12, § II.15]), pentru $M \equiv G$ rezultă:

$$GI^2 = \frac{aGA^2 + bGB^2 + cGC^2}{a+b+c}.$$

Dar $GA^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ şi analoagele dau: $GI^2 = \frac{p^2-16Rr+5r^2}{9}$, unde am utilizat şi relaţiile $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-4Rr-r^2)$, $ab+bc+ac = p^2+4Rr+r^2$ şi $abc = 4Rrp$. □

Teorema 57 *Fie I centrul cercului înscris şi H ortocentrul triunghiului ABC. Atunci, $IH^2 = 2r^2 - 2r_hR$ (unde r_h este raza cercului înscris în triunghiul ortic al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ şi $H_aH_bH_c$ triunghiurile de contact, respectiv ortic corespunzătoare triunghiului ABC (Figura 1.10). Deoarece AI şi BI sunt bisectoarele

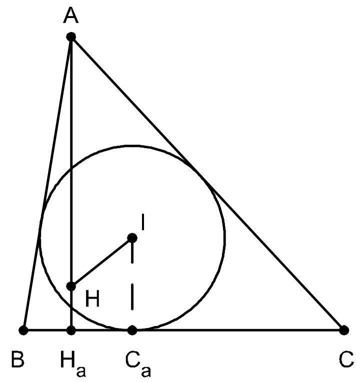

Figura 1.10: $IH^2 = 2r^2 - 2r_hR$

unghiurilor $\widehat{BAC}$, respectiv $\widehat{ABC}$ rezultă $AI = \frac{r}{\sin A/2}$ (i) şi $BC_a = rctg\frac{B}{2}$ (ii). Avem, $BH_a = c\cos B$, $C_aH_a = BH_a - BC_a = c\cos B - rctg\frac{B}{2}$. Din triunghiul IC_aH_a rezultă $IH_a^2 = r^2 + \left(c\cos B - rctg\frac{B}{2}\right)^2$ (iii). Dar $AH = 2R\cos A$ (iv) şi $HH_a = 2R\cos B\cos C$ (v). Relaţia lui Stewart aplicată în triunghiul AIH_a ne dă:

$$AI^2 \cdot HH_a + IH_a^2 \cdot AH - IH^2 \cdot AH_a = HH_a \cdot AH \cdot AH_a \qquad \text{(vi)}$$

Din relaţiile (i) - (vi) rezultă $IH^2 = 2r^2 - 2r_hR$, unde $r_h = 2R\cos A\cos B\cos C$ (vezi „Triunghiul ortic”). □

Teorema 58 *Într-un triunghi ABC, centrul cercului înscris (I), centrul de greutate (G) şi punctul lui Nagel (N) sunt coliniare şi $IG = \frac{GN}{2}$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 59 *Într-un triunghi ABC, fie I centrul cercului înscris triunghiului, O centrul cercului circumscris, H ortocentrul şi N punctul lui Nagel al triunghiului ABC. Atunci, $IO = \frac{HN}{2}$ şi $HN \parallel OI$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 60 *Dreptele IH şi S_pO sunt paralele şi $IH = 2S_pO$ (unde S_p este punctul lui Spieker al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Vezi „ Punctul lui Spieker". □

Teorema 61 *Centrul cercului înscris în triunghiul median al unui triunghi ABC este mijlocul segmentului IN, unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 62 *Punctele I, G, S_p, N sunt coliniare şi $12GS_p = 6GI = 4IS_p = 3NG = 2NI$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 63 *Centrul cercului înscris într-un triunghi aparţine dreptei lui Nagel corespunzătoare triunghiului.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 64 *Centrul cercului înscris în triunghiul ABC este punctul lui Nagel al triunghiului median.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 65 *În triunghiul ABC fie $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$. Dreapta MN trece prin centrul cercului înscris în triunghiul ABC dacă şi numai dacă $b \cdot \frac{MB}{MA} + c \cdot \frac{NC}{NA} = a$.*

Demonstraţie. Vezi [12, § II.15] □

Teorema 66 *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi A', B', C' punctele de intersecţie dintre bisectoarele AI, BI respectiv CI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ este punctul I.*

Demonstraţie. Fie $\{D\} = AA' \cap B'C'$. Avem $m(\widehat{AA'C'}) + m(\widehat{DC'A'}) = m(\widehat{ACC'}) + [m(\widehat{B'BC}) + m(\widehat{CAA'})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{C}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{A})] = 90°$, de unde rezultă că $m(\widehat{A'DC'}) = 90°$, deci $AA' \perp A'C'$, adică I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$. □

Teorema 67 *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi A', B', C' punctele de intersecţie dintre bisectoarele AI, BI respectiv CI cu mediatoarele corespunzătoare. Atunci, $A'B'$ este mediatoarea segmentului IC, $B'C'$ este mediatoarea segmentului IA şi $C'A'$ este mediatoarea segmentului IB.*

Demonstraţie. Punctele A', B', C' sunt punctele de intersecţie dintre bisectoarele AI, BI, respectiv CI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece A' este centrul cercului circumscris triunghiului BIC (vezi „Cercuri exînscrise") rezultă concluzia. □

Teorema 68 *Măsura unghiului determinat de bisectoarea interioară unghiului A a triunghiului ABC şi înălţimea din A este egală cu* $\frac{1}{2}\left|m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)\right|$.

Demonstraţie. Fie H_a piciorul înălţimii din A şi A'piciorul bisectoarei din A (Figura 1.11).Considerăm cazul în care $A' \in (H_aC)$, cazul în care $A' \in (H_aB)$

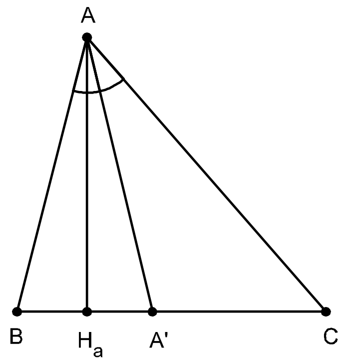

Figura 1.11: Măsura unghiului dintre de bisectoare şi înălţime

tratându-se analog. Din $m(\widehat{H_aAA'}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A}) - m(\widehat{H_aAB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A}) - [90 - m(\widehat{B})] = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) - \left[\frac{1}{2}(m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})) - m(\widehat{B})\right]$ rezultă $m(\widehat{H_aAA'}) = \frac{1}{2}\left[m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})\right]$.
□

Teorema 69 *Proiecţiile vârfului A al triunghiului ABC pe cele patru bisectoare ale unghiurilor B şi C sunt coliniare.*

Demonstraţie. Fie P, Q şi R, S proiecţiile vârfului A pe bisectoarele exterioare, respectiv interioare ale vârfurilor B şi C. Patrulaterele $PBRA$ şi $CQAS$ sunt dreptunghiuri, deci PR trece prin M, mijlocul lui AB şi SQ trece prin N, mijlocul laturii AC (Figura 1.12). Deoarece $\sphericalangle MBR \equiv \sphericalangle MRB \equiv \sphericalangle RBC$ rezultă că $MR \parallel BC$, deci

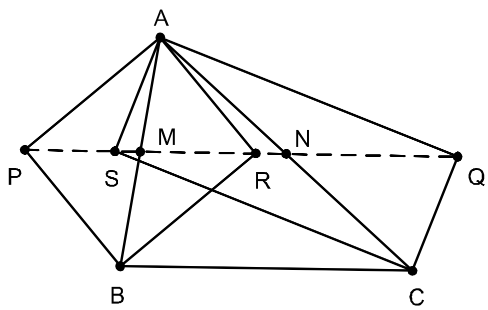

Figura 1.12: Proiecţiile vârfului A pe bisectoarele din B şi C

R aparţine dreptei MN. Analog se arată că $S \in MN$, deci punctele P, Q, R, S sunt coliniare. □