Demonstraţie. Vezi [12, § III.48]. □

Teorema 853 *Axa radicală a unui cerc Apollonius corespunzător unui vârf al triunghiului ABC şi a cercului circumscris triunghiului ABC este simediana corespunzătoare vârfului comun celor două cercuri.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile lui Apollonius”. □

Teorema 854 *Punctul lui Lemoine are puteri egale faţă de cercurile lui Apollonius.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile lui Apollonius”. □

2.18 DREAPTA LUI HOUSEL

„Ştiu că nu ştiu nimic” - Socrate[28]

Dreapta care uneşte centrul cercului înscris (I) într-un triunghi ABC cu centrul cercului înscris (I_m) în triunghiul său median $M_aM_bM_c$ se numeşte ***dreapta lui Housel*** (h).

Teorema 855 *În triunghiul ABC sunt adevărate relaţiile:*

$$AI \parallel M_aI_m, BI \parallel M_bI_m, CI \parallel M_cI_m.$$

Demonstraţie. Deoarece patrulaterul $AM_cM_aM_b$ este paralelogram (Figura 2.96)

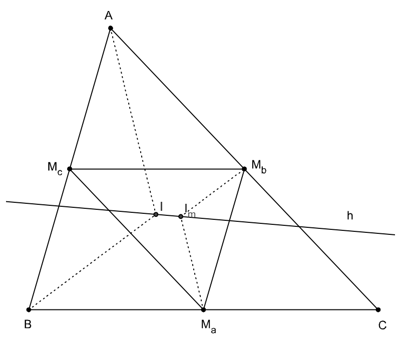

Figura 2.96: Dreapta lui Housel

rezultă $\widehat{M_bAM_c} \equiv \widehat{M_bM_aM_c}$, deci $\frac{1}{2}m(\widehat{M_bAM_c}) = \frac{1}{2}m(\widehat{M_bM_aM_c})$ sau $m(\widehat{IAM_c}) = m(\widehat{I_mM_aM_b})$ şi cum $M_cA \parallel M_aM_b$ rezultă $AI \parallel M_aI_m$. Analog se arată că $BI \parallel M_bI_m$ şi $CI \parallel M_cI_m$. □

[28]Socrate (470 -399 î.H.) – filosof al Greciei antice

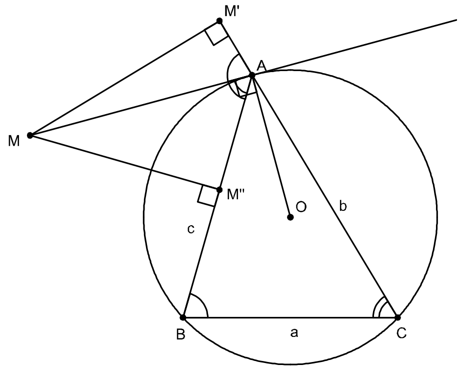

Figura 2.97: Simediana exterioară

2.19 SIMEDIANA EXTERIOARĂ

„Dacă geometria doreşte să devină o adevărată ştiinţă deductivă, este esenţial ca modul prin care sunt obţinute deducţiile să fie complet independent de semnificaţia conceptelor geometrice ca şi de figuri; tot ceea ce este necesar sunt relaţiile între conceptele geometrice afirmate prin propoziţii şi definiţii" - Moritz Pasch[29]

Se numeşte ***simediană exterioară*** a unui vârf al triunghiului ABC, locul geometric al punctelor exterioare triunghiului ale căror distanţă la laturile adiacente ale triunghiului sunt proporţionale cu lungimile acestor laturi.

Teorema 856 *Simediana exterioară a vârfului A este tangentă în A la cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie M un punct pe tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC, iar M' şi M" proiecţiile lui M pe laturile AC respectiv AB (Figura 2.97). Avem $\sphericalangle M'AM \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle MAM" \equiv \sphericalangle ACB$. Din triunghiurile dreptunghice MAM'şi $MAM"$ rezultă $MM' = AM \sin B$ şi $MM" = AM \sin C$, de unde $\frac{MM'}{MM"} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$.□

Teorema 857 *Două simediane exterioare şi o simediană interioară ale unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie T_A punctul de intersecţie al simedianelor exterioare duse în B, respectiv C. Prin T_A ducem antiparalela PQ la BC,$P \in AB, Q \in AC$ (Figura 2.98). Din

$$m(\sphericalangle PBT_A) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB}) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BPT_A)$$

rezultă că triunghiul BT_AP este isoscel, deci $PT_A = BT_A$; analog, triunghiul CT_AQ este isoscel cu $T_AC = T_AQ$, de unde rezultă că $PT_A = T_AQ$, adică T_A aparţine simedianei din A. □

[29]Moritz Pasch (1843-1930) – matematician german, profesor universitar la Gissen, contribuţii importante în geometrie