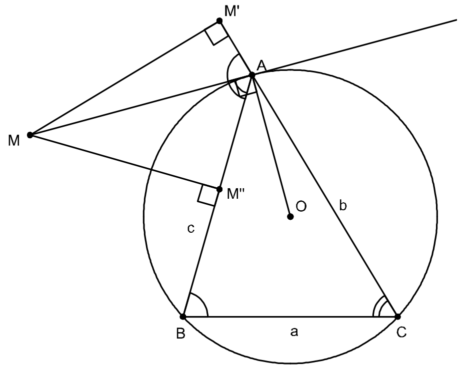

Figura 2.97: Simediana exterioară

2.19 SIMEDIANA EXTERIOARĂ

„Dacă geometria doreşte să devină o adevărată ştiinţă deductivă, este esenţial ca modul prin care sunt obţinute deducţiile să fie complet independent de semnificaţia conceptelor geometrice ca şi de figuri; tot ceea ce este necesar sunt relaţiile între conceptele geometrice afirmate prin propoziţii şi definiţii" - Moritz Pasch[29]

Se numeşte ***simediană exterioară*** a unui vârf al triunghiului ABC, locul geometric al punctelor exterioare triunghiului ale căror distanţă la laturile adiacente ale triunghiului sunt proporţionale cu lungimile acestor laturi.

Teorema 856 *Simediana exterioară a vârfului A este tangentă în A la cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie M un punct pe tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC, iar M' şi $M"$ proiecţiile lui M pe laturile AC respectiv AB (Figura 2.97). Avem $\sphericalangle M'AM \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle MAM" \equiv \sphericalangle ACB$. Din triunghiurile dreptunghice MAM'şi $MAM"$ rezultă $MM' = AM\sin B$ şi $MM" = AM\sin C$, de unde $\frac{MM'}{MM"} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$.□

Teorema 857 *Două simediane exterioare şi o simediană interioară ale unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie T_A punctul de intersecţie al simedianelor exterioare duse în B, respectiv C. Prin T_A ducem antiparalela PQ la BC,$P \in AB, Q \in AC$ (Figura 2.98). Din

$$m(\sphericalangle PBT_A) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB}) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BPT_A)$$

rezultă că triunghiul BT_AP este isoscel, deci $PT_A = BT_A$; analog, triunghiul CT_AQ este isoscel cu $T_AC = T_AQ$, de unde rezultă că $PT_A = T_AQ$, adică T_A aparţine simedianei din A. □

[29] Moritz Pasch (1843-1930) – matematician german, profesor universitar la Gissen, contribuţii importante în geometrie

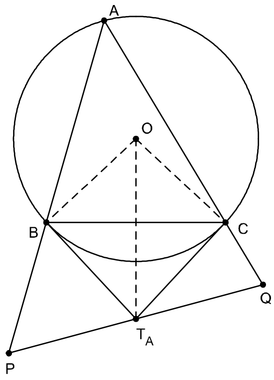

Figura 2.98: Simediane exterioare concurente

Observaţia 858 *O simediană interioară trece prin punctul de întâlnire al tangentelor la cercul circumscris, duse prin celelalte două vârfuri ale triunghiului.*

Observaţia 859 *Punctul T_A aparţine cercului circumscris triunghiului BOC, deoarece patrulaterul OBT_AC este inscriptibil.*

Teorema 860 *Dacă A' este piciorul simedianei exterioare pe dreapta BC, atunci $\frac{A'B}{A'C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$.*

Demonstraţie. Triunghiurile $A'AB$ şi $A'AC$ (Figura 2.99) sunt asemenea deoarece

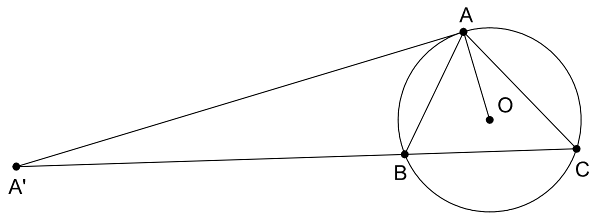

Figura 2.99: $\frac{A'B}{A'C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

au unghiul A' comun şi $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle ACA'$, deci $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{A'A}{A'C}$, de unde rezultă $\frac{A'B}{A'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$. □

Observaţia 861 *Dacă B', C' sunt punctele de intersecţie dintre simedianele exterioare ale vârfurilor B, C ale triunghiului ABC, atunci $\frac{B'C}{B'A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$şi $\frac{C'A}{C'B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$.*

Observaţia 862 *Punctele A', B', C' aparţin dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC.*