

3.2 CERCURI EXÎNSCRISE

„Natura vorbește în limbajul matematicii: literele acestei limbi sunt cercuri, triunghiuri și alte figuri geometrice.” –Galileo Galilei³

Teorema 921 *Două bisectoare exterioare și una interioară, trecând fiecare prin câte un vârf al triunghiului sunt concurente.*

Demonstrație. Fie I_a este punctul de concurență dintre bisectoarele exterioare

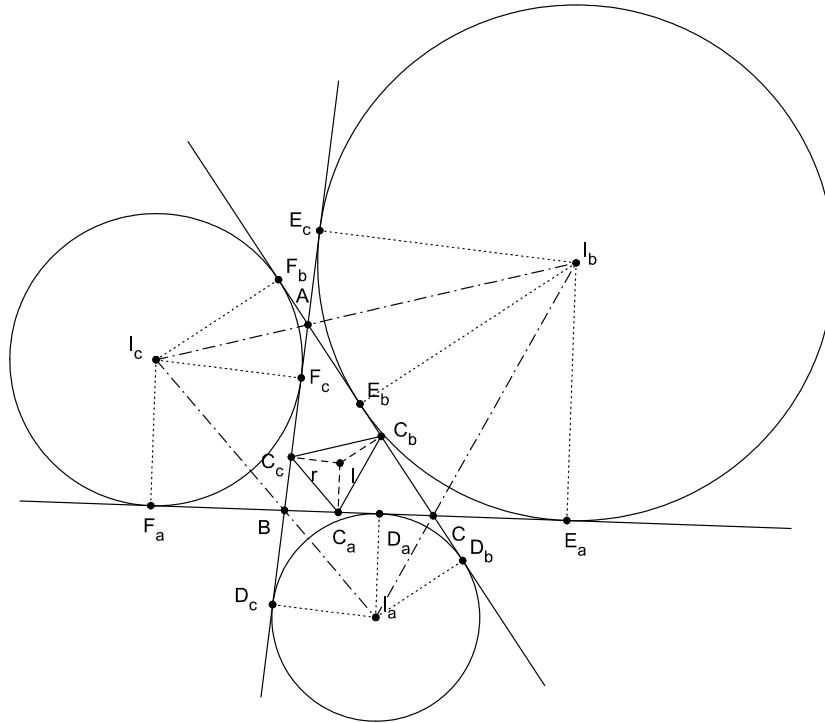


Figura 3.11: Cercuri exînscrise

ale unghiurilor B și C (Figura 3.11), atunci punctul I_a este egal depărtat de laturile BC și AB , respectiv de laturile BC și AC , deci el este egal depărtat și de laturile AB și AC , adică I_a aparține bisectoarei interioare a unghiului A . $\square$

Observația 922 *Punctul I_a fiind situat la aceeași distanță – notată cu r_a – față de laturile triunghiului ABC este centrul unui cerc tangent exterior laturii BC și prelun-girilor laturilor AB și AC .*

³Galileo Galilei (1564-1642) – matematician, fizician și astronom italian, profesor la Universitatea din Padova, contribuții remarcabile în fizică și astronomie

Un cerc care este tangent la o latură a unui triunghi și la prelungirile celorlalte două laturi ale triunghiului se numește **cerc exînscriș** al triunghiului. Evident, un triunghi are trei cercuri exînscrișe

Observația 923 *Cercurile exînscrișe și cercul înscris corespunzătoare unui triunghi se mai numesc cercuri tritangente. Notăm cu A -exînscriș, cercul exînscriș tangent la laturii BC a triunghiului ABC ; analog se notează cu B -exînscriș și C -exînscriș celelalte două cercuri exînscrișe; I_a, I_b, I_c sunt centrele cercurilor exînscrișe corespunzătoare și notăm cu r_a, r_b , respectiv r_c razele corespunzătoare cercurilor exînscrișe (Figura 3.11). Triunghiul $I_a I_b I_c$ se numește **triunghiul antisuplementar** corespunzător triunghiului ABC .*

Teorema 924 *Vârfurile triunghiului ABC aparțin laturilor triunghiului antisuplementar.*

Demonstrație. Soluție evidentă. □

Teorema 925 *Distanțele la laturile triunghiului ABC ale punctului I_a sunt egale cu r_a .*

Teorema 926 *Distanțele de la punctul I_a la vârfurile triunghiului ABC sunt egale cu:*

$$AI_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}}, BI_a = \frac{r_a}{\cos \frac{B}{2}}, CI_a = \frac{r_a}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Demonstrație. Fie D_a, D_b, D_c proiecțiile lui I_a pe laturile BC, CA , respectiv AB . Din triunghiul dreptunghic $D_c I_a A$ rezultă $r_a = AI_a \sin \frac{A}{2}$, iar din triunghiurile dreptunghice: $BI_a D_c$ și $CI_a D_b$ avem

$$r_a = BI_a \sin(\pi/2 - B/2) = BI_a \cos \frac{B}{2} \text{ și } r_a = CI_a \cos \frac{C}{2}.$$

□

Teorema 927 *Distanțele de la centrele cercurilor exînscrișe respectiv la vârfurile triunghiului ABC sunt egale cu:*

$$AI_a = p \cdot \cos \frac{A}{2}, BI_b = p \cdot \cos \frac{B}{2}, CI_c = p \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Din triunghiul dreptunghic $AI_a D_b$ rezultă $\cos \frac{A}{2} = \frac{AD_b}{AI_a} = \frac{p}{AI_a}$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 928 *Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$.*

Demonstrație. Evident $m(\angle I_c A I_a) = m(\angle I_c A B) + m(\angle B A I_a) = 90^\circ$, deci bisectoarea AI_a este înălțime în triunghiul $I_a I_b I_c$. Analog, $BI_b \perp I_a I_c$ și $CI_c \perp I_a I_b$, deci ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. □

Teorema 929 Centrul cercului înscris în triunghiul ABC este ortocentrul triunghiului $I_a I_b I_c$.

Demonstrație. Vezi teorema 928. $\square$

Teorema 930 Înălțimile unui triunghi sunt bisectoarele triunghiului ortic al triunghiului dat.

Demonstrație. Vezi teorema 928. $\square$

Teorema 931 Fie $D_a, D_b, D_c; E_a, E_b, E_c; F_a, F_b, F_c$ punctele de contact dintre cercurile A – exînscriș, B – exînscriș, respectiv C – exînscriș cu dreptele BC, CA și AB . Atunci, $AD_c = AD_b = p$, $BD_a = BD_c = p - c$ și $CD_a = CD_b = p - b$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Avem: $AD_c = AB + BD_c = c + BD_c$, $AD_b = AC + CD_b = b + CD_b$
(i) (Figura 3.12). Sumând relațiile precedente și ținând cont că $AD_b = AD_c$, $BD_a =$

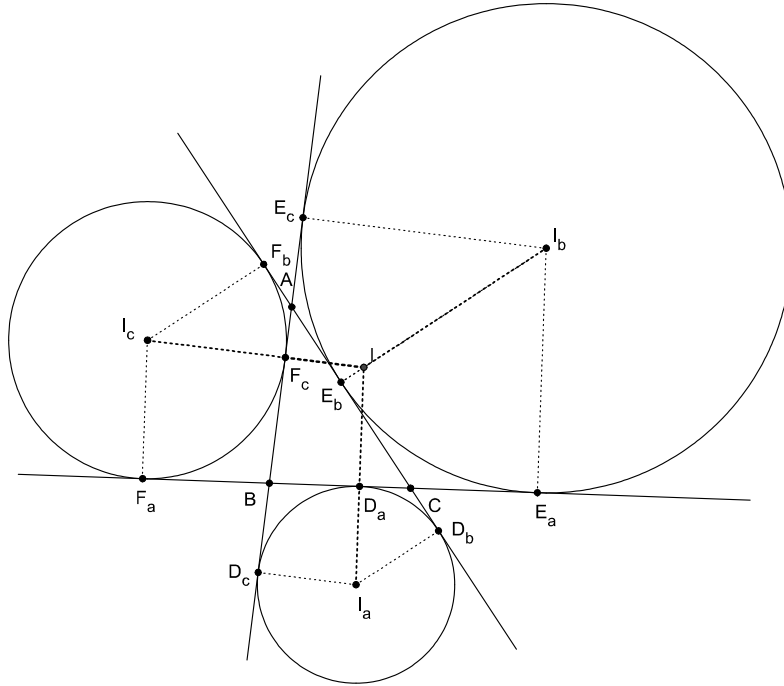


Figura 3.12: Distanțe

$BD_c, CD_a = CD_b$ rezultă $2AD_c = b + c + a = 2p$, adică $AD_c = p$. Analog se arată că $BE_a = BE_c = p$ și $CF_a = CF_b = p$. Din relațiile (i) rezultă $BD_c = p - c$ și $CD_b = p - b$. $\square$

Observația 932 Analog $CE_a = CE_b = p - a$ și $AE_c = AE_b = p - c$.

Teorema 933 *Distanțele dintre punctele de contact aflate în prelungirea aceeași laturi determinate de câte două cercuri exînscrie sunt egale cu $a + b$, $b + c$, respectiv $c + a$.*

Demonstrație. Avem $E_a F_a = E_a C + CB + B F_a = p - a + a + p - a = 2p - a = b + c$. Analog, $D_b F_b = a + c$ și $E_c D_c = a + b$. $\square$

Teorema 934 *Distanța între punctele interioare C_a și D_a este egală cu diferența celorlalte laturi.*

Demonstrație. Avem: $D_a C_a = C D_a - C C_a = (p - b) - (p - c) = c - b$. Analog se arată că $E_b C_b = |a - c|$ și $F_c C_c = |a - b|$. $\square$

Teorema 935 *Distanța de la punctul de contact C_a al cercului înscris la punctele exterioare E_a și F_a sunt respectiv egale cu b și c .*

Demonstrație. Avem, $C_a E_a = C_a C + C E_a = (p - c) - (p - a) = b$ și analog $C_a F_a = c$. $\square$

Teorema 936 (Teorema lui Nagel) *Perpendicularele pe laturile unui triunghi duse din centrele cercurilor exînscrie sunt concurente.*

Demonstrație. Soluția 1. Deoarece perpendicularele duse din vârfurile unui triunghi ABC pe laturile triunghiului ortic corespunzător sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , rezultă că perpendicularele duse din centrele cercurilor exînscrie I_a, I_b, I_c pe laturile BC, CA , respectiv AB sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului $I_a I_b I_c$.

Soluția 2. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$ (Figura 3.12). Fie D_a, E_b, F_c proiecțiile punctelor I_a, I_b , respectiv I_c pe laturile BC, AC , respectiv AB . Atunci, $BD_a = p - c$, $CD_a = p - b$, $AF_c = p - b$, $BF_c = p - a$, $AE_b = p - c$, $CE_b = p - a$, de unde rezultă că

$$BD_a^2 + CE_b^2 + AF_c^2 = (p - c)^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 = AE_b^2 + BF_c^2 + CD_a^2$$

și din teorema lui Carnot rezultă că dreptele $I_a D_a, I_b E_b$ și $I_c F_c$ sunt concurente. $\square$

Teorema 937 *Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , R și r_a razele cercului circumscris, respectiv A -exînscriș în triunghiul ABC , atunci:*

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Demonstrație. Fie A'' cel de-al doilea punct în care dreapta AI_a intersectează cercul circumscris triunghiului ABC . Utilizând puterea punctului I_a față de cercul circumscris triunghiului ABC obținem:

$$OI_a^2 - R^2 = AI_a \cdot A''I_a \quad (i)$$

În triunghiul $AI_a A_c$, $\sin \frac{A}{2} = \frac{r_a}{AI_a}$ sau $AI_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}}$ (ii) iar în triunghiul ABA'' din teorema sinusurilor rezultă $\frac{BA''}{\sin \frac{A}{2}} = 2R$, adică $BA'' = 2R \sin \frac{A}{2} = A''I_a$ (iii). Din relațiile (i) - (iii) rezultă $OI_a^2 - R^2 = 2Rr_a$, de unde $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$. $\square$

Observația 938 $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ este relația lui Euler.

Teorema 939 Patrulateralele $BICI_a$, $AICI_b$ și $AIBI_c$ sunt inscriptibile.

Demonstrație. Deoarece $m(\angle I_a BI) = m(\angle I_a CI) = 90^\circ$ rezultă

$$m(\angle I_a BI) + m(\angle I_a CI) = 180^\circ,$$

adică patrulaterul $BICI_a$ este inscriptibil. Analog, se arată patrulateralele $AICI_b$ și $AIBI_c$ sunt inscriptibile. $\square$

Teorema 940 Centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$ este mijlocul segmentului II_a .

Demonstrație. Evident, deoarece $m(\angle IBI_a) = 90^\circ$ rezultă că II_a este diametru în cercul circumscris patrulaterului $BICI_a$. $\square$

Teorema 941 (Teorema lui Beltrami) Mijlocul segmentului II_a aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A'' cel de-al doilea punct de intersecție dintre II_a și cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 3.13). Cum

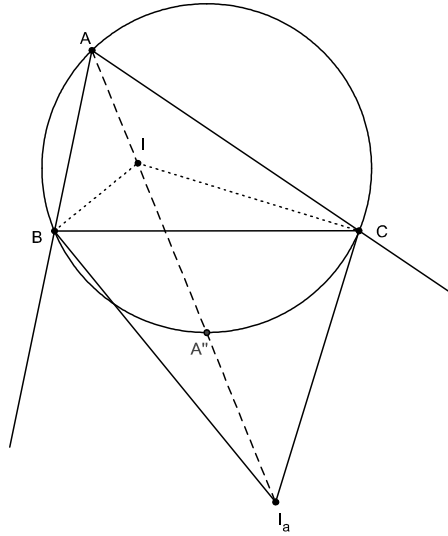


Figura 3.13: Teorema lui Beltrami

$$m(\angle A''IB) = m(\angle IAB) + m(\angle IBA) = \frac{1}{2}m(\angle A) + \frac{1}{2}m(\angle B)$$

și

$$m(\angle IBA'') = m(\angle IBC) + m(\angle CBA'') = \frac{1}{2}m(\angle B) + \frac{1}{2}m(\angle A)$$

rezultă că triunghiul $IA''B$ este isoscel, deci $A''I = A''B$. Analog, $IA'' = A''C$, adică A'' este centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$. $\square$

Teorema 942 *Unghiul $\sphericalangle B I_a C$ are măsura egală cu $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$.*

Demonstrație. Deoarece $m(\sphericalangle B I C) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$ și patrulaterul $B I C I_a$ este inscriptibil rezultă

$$m(\sphericalangle B I_a C) = 180^\circ - m(\sphericalangle B I C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$$

□

Observația 943 *Analog, $m(\sphericalangle C I_b A) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)$ și $m(\sphericalangle A I_c B) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ACB)$.*

Teorema 944 *Axa radicală a cercurilor înscris în triunghiul ABC și A - exînscriș corespunzător triunghiului ABC este bisectoarea exterioară a vârfului M_a a triunghiului median al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $F_a D_a$ este tangenta comună (diferită de laturile triunghiului) cercurilor înscris și A - exînscriș, rezultă că axa radicală trece prin mijlocul segmentului $F_a D_a$, adică prin M_a mijlocul laturii BC . Cum axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor $I I_a$ rezultă că este perpendiculară și pe bisectoarea interioară a mijlocului $\sphericalangle M_c M_a M_b$, adică axa radicală este bisectoarea exterioară a vârfului M_a a triunghiului median $M_c M_a M_b$. □

Observația 945 *Centrele radicale ale cercurilor înscris, A - exînscriș, B - exînscriș și C - exînscriș sunt centrele cercurilor înscrise și exînscrișe în triunghiul median al triunghiului ABC .*

Teorema 946 *Axa radicală dintre cercurile B - exînscriș și C - exînscriș ale triunghiului ABC este bisectoarea interioară a vârfului M_a a triunghiului medial al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $E_a F_a$ este tangenta exterioară comună cercurilor B - exînscriș și C - exînscriș, rezultă că axa radicală a acestor două cercuri trece prin mijlocul segmentului $E_a F_a$, adică în punctul M_a și este perpendiculară pe linia centrelor $I_b I_c$, deci axa radicală este paralelă cu bisectoarea unghiului A , adică este bisectoarea unghiului $\sphericalangle M_c M_a M_b$. □

Observația 947 *Analog, axele radicale dintre perechile de cercuri (C - exînscriș, A - exînscriș) și (A - exînscriș, B - exînscriș) sunt bisectoarele interioare ale vârfulurilor M_b , respectiv M_c ale triunghiului median.*

Teorema 948 *Cercurile circumscrise triunghiurilor $I I_a I_b$, $I I_b I_c$ și $I I_c I_a$ sunt congruente.*

Demonstrație. Deoarece I este ortocentrul triunghiului $I_a I_b I_c$ (vezi [12, § III.10]) rezultă concluzia (vezi „Ortocentrul unui triunghi”). □

Teorema 949 Centrul radical al cercurilor exînscrie este centrul cercului înscris în triunghiul median.

Demonstrație. Vezi teorema precedentă. $\square$

Teorema 950 Distanțele dintre centrele cercurilor exînscrie și centrul cercului înscris într-un triunghi ABC sunt egale cu:

$$II_a = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2}, II_b = \frac{b}{\cos \frac{B}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2}, II_c = \frac{c}{\cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Din teorema 941 rezultă că

$$II_a = 2IA'' = 2BA'' = 2 \cdot 2R \sin \frac{A}{2} = 4R \sin \frac{A}{2}.$$

Dar, $4R \sin \frac{A}{2} = 2R \frac{\sin A}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}$, de unde rezultă concluzia. $\square$

Teorema 951 Distanțele dintre centrele cercurilor exînscrie într-un triunghi ABC sunt egale cu:

$$I_b I_c = 4R \cos \frac{A}{2}, I_c I_a = 4R \cos \frac{B}{2}, I_a I_b = 4R \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Deoarece măsurile unghiurilor triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$ sunt egale cu:

$$90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$$

și raza cercului circumscris acestui triunghi este $2R$ (vezi [12, § III.10]) din teorema sinusurilor rezultă

$$\frac{I_b I_c}{\sin(90^\circ - A/2)} = \frac{I_c I_a}{\sin(90^\circ - B/2)} = \frac{I_a I_b}{\sin(90^\circ - C/2)} = 2 \cdot 2R$$

sau

$$I_b I_c = 4R \cos \frac{A}{2}, I_c I_a = 4R \cos \frac{B}{2}, I_a I_b = 4R \cos \frac{C}{2}.$$

$\square$

Teorema 952 Punctele I, I_a, A', A formează o diviziune armonică, unde $\{A'\} = II_a \cap BC$.

Demonstrație. Deoarece $\frac{A'I}{A'I_a} = \frac{r}{r_a}$ și $\frac{AI}{AI_a} = \frac{p-a}{p}$, iar $A_{[ABC]} = pr = (p-a)r_a$, rezultă $\frac{A'I}{A'I_a} = \frac{AI}{AI_a}$, deci punctele I, I_a, A', A formează o diviziune armonică. $\square$

Teorema 953 Punctele de contact C_a și D_a sunt conjugate armonic în raport cu picioarele bisectoarei interioare (A') și a înălțimii din A (H_a).

Demonstrație. Deoarece punctele I, I_a, A', A formează o diviziune armonică, rezultă că și proiecțiile lor $C_a, D_a, A',$ respectiv H_a formează o diviziune armonică. $\square$

Teorema 954 *Punctele I_b, I_c, A, P formează o diviziune armonică, unde $\{P\} = I_b I_c \cap BC$.*

Demonstrație. Deoarece $\frac{AI_b}{AI_c} = \frac{p-c}{p-b}$ și $\frac{PI_b}{PI_c} = \frac{r_b}{r_c}$, iar $A_{[ABC]} = (p-c)r_c = (p-b)r_b$, rezultă $\frac{AI_b}{AI_c} = \frac{PI_b}{PI_c}$. $\square$

Teorema 955 *Punctele B, C, A', P formează o diviziune armonică, unde $\{P\} = I_b I_c \cap BC$.*

Demonstrație. Avem: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$, deci punctele B, C, A', P formează o diviziune armonică $\square$

Teorema 956 *Aria unui triunghi ABC este egală cu*

$$A_{[ABC]} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{rr_a r_b r_c},$$

unde p este semiperimetrul triunghiului, r este raza cercului înscris, iar r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Demonstrație. Vezi [12, § II.61]. $\square$

Teorema 957 *Lungimile razelor cercurilor tritangente corespunzătoare triunghiului ABC sunt egale cu:*

$$r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, r_b = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, r_c = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Avem

$$r_a = \frac{A_{[ABC]}}{p-a} = \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

de unde rezultă

$$r_a = \frac{R \cdot (2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}) \cdot (2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}) \cdot (2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2})}{2R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Analog se arată și celelalte două egalități. $\square$

Teorema 958 *În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:*

$$i) r_a + r_b + r_c = r + 4R,$$

$$ii) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Demonstrație. i) Avem: $R = \frac{abc}{4A_{[ABC]}}$, $r = \frac{A_{[ABC]}}{p}$, $r_a = \frac{A_{[ABC]}}{p-a}$, $r_b = \frac{A_{[ABC]}}{p-b}$ și $r_c = \frac{A_{[ABC]}}{p-c}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, deci

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{2p^3 - ap^2 - bp^2 - cp^2 + abc}{A_{[ABC]}} = \frac{p^2[2p - (a+b+c)] + abc}{A_{[ABC]}} = \frac{abc}{A_{[ABC]}} = 4R.$$

Analog se arată ii). $\square$

Observația 959 Ecuația $r_a + r_b + r_c = r + 4R$ se numește **relația lui Steiner**.

Teorema 960 În orice triunghi ABC este adevărată relația:

$$OI^2 + OI_a^2 + OI_b^2 + OI_c^2 = 12R^2.$$

Demonstrație. Din relațiile lui Euler avem $OI^2 = R^2 - 2Rr$, $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, și analoagele. Avem:

$$\begin{aligned} OI^2 + OI_a^2 + OI_b^2 + OI_c^2 &= 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r) \\ &= 4R^2 + 2R \cdot 4R = 12R^2, \end{aligned}$$

unde am utilizat relația $r_a + r_b + r_c = 4R + r$. □

Teorema 961 În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:

- 1) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$;
- 2) $(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 2Rp^2$;
- 3) $r(r_a - r_b)(r_b - r_c)(r_c - r_a) = p(a - b)(b - c)(c - a)$;
- 4) $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4Rr^2$;
- 5) $r_a - r = \frac{a \cdot A_{[ABC]}}{p(p-a)}$;
- 6) $\frac{(r_a + r)(r_b + r)(r_c + r)}{r} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{p}$;
- 7) $r_a r_b = p(p - c)$;
- 8) $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{A_{[ABC]}^2}$;
- 9) $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_c^2} = \frac{12R}{rr_a r_b r_c}$;
- 10) $\frac{a^2}{r_a(r_b + r_c)} + \frac{b^2}{r_b(r_a + r_c)} + \frac{c^2}{r_c(r_a + r_b)} = 2$;
- 11) $r_a(r_b + r_c) + r_b(r_c + r_a) + r_c(r_a + r_b) = 2p^2$.

Demonstrație. Se utilizează egalitățile $A_{[ABC]} = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{rr_a r_b r_c}$. □

Teorema 962 În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:

$$p = r_a \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r_b \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = r_c \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic $AI_a D_c$, avem imediat $p = r_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. Analog se obțin celelalte egalități. □

Teorema 963 În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:

$$\begin{aligned} p - a &= r_b \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = r_c \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = r_a \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \\ p - b &= r_a \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = r_c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = r_b \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \\ p - c &= r_a \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = r_b \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = r_c \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic BI_aD_c , de exemplu, avem: $BI_a = p - c = r_a \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - B/2) = r_a \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Pentru următoarele relații:

$$p + p - b + p - c = r_a \left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}B + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \right) = r_a \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Analog se arată celelalte egalități. $\square$

Teorema 964 În orice triunghi ABC este adevărată relația $1/r - 1/r_a = 2/h_a$, unde h_a reprezintă lungimea înălțimii duse din vârful A .

Demonstrație. Avem $1/r - 1/r_a = p/S - (p - a)/S = a/S = 2/h_a$, unde S reprezintă aria triunghiului ABC . $\square$

Teorema 965 În orice triunghi ABC sunt adevărate relațiile:

$$1) \quad \frac{1 - r/r_a}{a} = \frac{1 - r/r_b}{b} = \frac{1 - r/r_c}{c} = \frac{1}{p},$$

$$2) \quad (h_a + h_b)/r_c + (h_b + h_c)/r_a + (h_c + h_a)/r_b = 6.$$

Demonstrație. Se utilizează relația $1/r - 1/r_a = 2/h_a$ și analoagele. $\square$

Teorema 966 În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:

$$rr_b + rr_c + r_br_c = p^2 - a^2, rr_c + rr_a + r_cr_a = p^2 - b^2, rr_a + rr_b + r_ar_b = p^2 - c^2.$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} rr_b + rr_c + r_br_c &= (p - a)(p - c) + (p - a)(p - b) + p(p - a) \\ &= (p - a)(p + a) = p^2 - a^2. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 967 În orice triunghi ABC sunt adevărate egalitățile:

$$ar = (p - a)(r_a - r) \text{ și } ar_a = p(r_a - r).$$

Demonstrație. Avem $r_a - r = \frac{a \cdot A_{[ABC]}}{p(p - a)} = \frac{ar}{p - a} = \frac{ar_a}{p}$. $\square$

Teorema 968 În orice triunghi ABC este adevărată relația

$$ar_a + br_b + cr_c = 2p(R - r).$$

Demonstrație. Se utilizează teorema precedentă. $\square$