3.3 CERCURILE LUI LEMOINE

„Matematica este nici mai mult, nici mai puţin decât partea exactă a gândirii noastre." – L. Brower[4]

Teorema 969 *Punctele de intersecţie dintre laturile triunghiului ABC şi paralelele duse la laturile triunghiului prin punctul său simedian aparţin unui cerc.*

Demonstraţie. Fie M, N, P, Q, R, S punctele de intersecţie (Figura 3.14) şi K

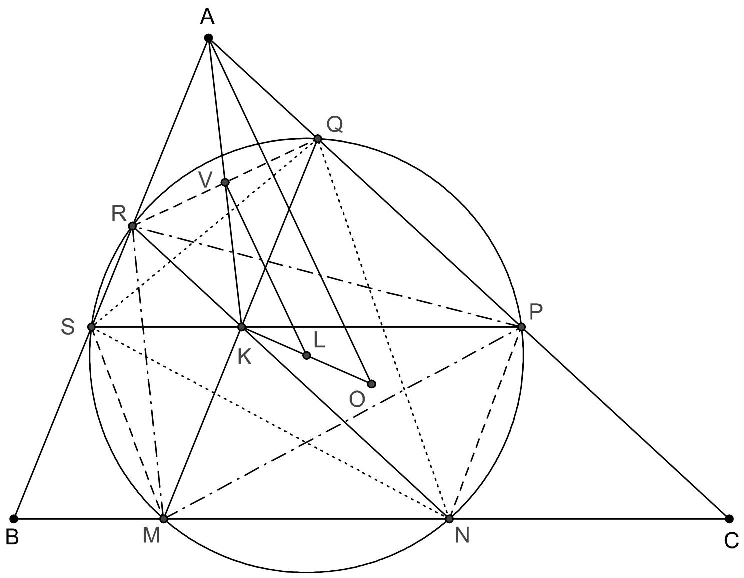

Figura 3.14: Cercurile lui Lemoine

punctul lui Lemoine al triunghiului ABC.

Deoarece $ARKQ$ este paralelogram rezultă că mijlocul diagonalei RQ aparţine simedianei AK, deci RQ este antiparalelă cu BC. Analog, dreptele SM şi NP sunt antiparalele cu laturile AC, respectiv AB. Atunci, $\widehat{ARQ} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BSM}$ şi cum $MQ \parallel AB$ rezultă că patrulaterul $SMQR$ este trapez isoscel, deci punctele S, M, Q, R sunt pe un cerc $\mathcal{L}$. Din $RN \parallel AC$ rezultă $\sphericalangle BRN \equiv \sphericalangle BAC$ (i); din $MQ \| AB$ rezultă $\sphericalangle QMC \equiv \sphericalangle ABC$ (ii) şi $\sphericalangle BSM \equiv \sphericalangle SMQ \equiv \sphericalangle ACB$ (iii). Din relaţiile (i), (ii) şi (iii) rezultă

$$m(\sphericalangle SRN) + m(\sphericalangle SMN) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ABC) + m(BCA) = 180^\circ,$$

adică patrulaterul $SMNR$ este inscriptibil, deci punctul $N \in \mathcal{L}$. Analog, patrulaterul $SMNP$ este trapez isoscel, deci şi $P \in \mathcal{L}$. Astfel punctele M, N, P, Q, R, S sunt conciclice. □

[4] L. Brower (1881-1966) – matematician danez, contribuţii în logica matematică

Observaţia 970 *Cercul $\mathcal{L}$ se numeşte* ***primul cerc al lui Lemoine***[5]*. Paralelele duse prin punctul lui Lemoine la laturile triunghiului ABC se numesc* ***paralelele lui Lemoine****.*

Teorema 971 *Centrul primului cerc al lui Lemoine este mijlocul segmentului OK (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Fie V şi L mijloacele segmentelor RQ, respectiv KO. Atunci VL este linia mijlocie în triunghiul AKO, deci $VL \parallel AO$ şi $VO = AO/2 = R/2$. Deoarece $AO \perp RQ$ rezultă $VL \perp RQ$, deci triunghiul RLQ este isoscel, de unde $RL \equiv LQ$. Analog, se arată că $LS \equiv LM \equiv LN \equiv LP \equiv LR$, adica mijlocul segmentului KO este centrul primului cerc al lui Lemoine al triunghiului ABC. □

Teorema 972 *Primul cerc al lui Lemoine şi cercul lui Brocard sunt concentrice.*

Demonstraţie. Ambele cercuri au centrul în mijlocul segmentului OK. □

Teorema 973 *Primul cerc al lui Lemoine determină pe laturile triunghiului ABC segmente proporţionale cu pătratul lungimilor laturilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB. Avem:

$$\frac{BM}{MN} = \frac{RK}{KN} = \frac{c^2}{a^2},$$

deoarece ($MK \parallel BR$) sau $\frac{BM}{c^2} = \frac{MN}{a^2}$ (i) şi $\frac{MN}{NC} = \frac{KM}{KQ} = \frac{a^2}{b^2}$, adică $\frac{MN}{a^2} = \frac{NC}{b^2}$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{MN}{a^2} = \frac{NC}{b^2} = \frac{BM}{c^2}$. □

Teorema 974 *Coardele MN, PQ şi RS sunt proporţionale cu a^3, b^3, respectiv c^3.*

Demonstraţie. Din proprietatea precedentă avem

$$\frac{MN}{a^2} = \frac{NC}{b^2} = \frac{BM}{c^2} = \frac{MN + NC + BM}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2},$$

de unde $MN = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}$. Analog, $PQ = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2}$ şi $RS = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}$, deci $\frac{MN}{a^3} = \frac{PQ}{b^3} = \frac{RS}{c^3}$. □

Teorema 975 *Triunghiurile RMP şi SNQ sunt congruente şi asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Avem:

$$m(\widehat{MRP}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{MSP}) = m(\widehat{BAC}),$$

$$m(\widehat{MPR}) = \frac{1}{2} m(\widehat{RSM}) = m(\widehat{RQM}) = m(\widehat{ACB}),$$

deci triunghiurile RMP şi ABC sunt asemenea. Analog se arată că triunghiurile QSN şi ABC sunt asemenea. Deoarece $SN \equiv MP$ (ca diagonale într-un trapez isoscel) şi $SQ \equiv RM$ rezultă că triunghiurile RMP şi SNQ sunt congruente. □

[5] Emile Lemoine (1840-1912) – matematician francez, contribuţii importante în geometrie

Teorema 976 *Antiparalelele RQ,SM şi NP sunt congruente.*

Demonstraţie. Deoarece patrulaterele $SMNP$ şi $NPQR$ sunt trapeze isoscele, rezultă că $RQ \equiv SM \equiv NP$. □

Teorema 977 *Primul cerc al lui Lemoine este un cerc Tucker.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile Tucker”. □

Teorema 978 *Punctele de intersecţie dintre antiparalelele la laturile unui triunghi duse prin punctul lui Lemoine al triunghiului sunt şase puncte conciclice.*

Demonstraţie. Fie $S'P', R'N'$ şi $M'Q'$ antiparalele duse la laturile BC, CA

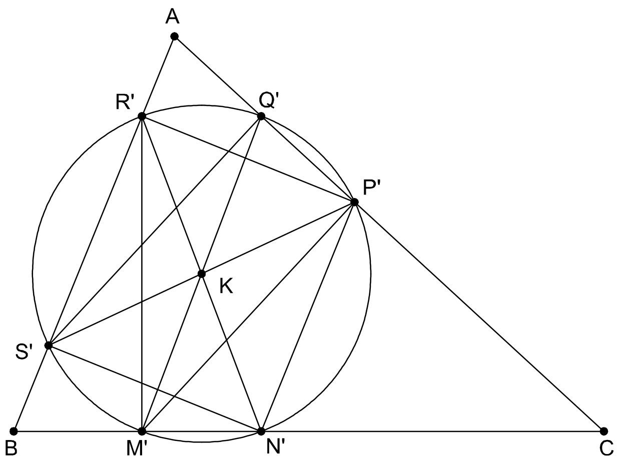

Figura 3.15: Al doilea cerc al lui Lemoine

respectiv AB prin punctul K al lui Lemoine al triunghiului ABC (Figura 3.15).

Atunci, K este mijlocul segmentelor $S'P', R'N', M'Q'$. Dar

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle S'P'Q' \equiv \sphericalangle M'Q'C,$$

deci triunghiul $KP'Q'$ este isoscel. Astfel, $KP' \equiv KQ'$ adică $S'P' \equiv M'Q'$. Analog, $M'Q' \equiv R'N'$, deci antiparalelele $S'P', R'N'$ şi $M'Q'$ sunt congruente şi au acelaşi mijloc K. Atunci, punctele M', N', P', Q', R', S' aparţin unui cerc $\mathcal{L}$’. □

Observaţia 979 *Cercul $\mathcal{L}$’ este al* ***doilea cerc al lui Lemoine.*** *Centrul cercului $\mathcal{L}$’ este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC.*

Teorema 980 *Coardele $M'N'$, $P'Q'$ şi $R'S'$ sunt proporţionale cu* $\cos A, \cos B, \cos C$.

Demonstraţie. Din triunghiul $KM'N'$ rezultă

$$\cos KM'N' = \cos A = \frac{M'N'}{2 \cdot KN'},$$

sau

$$\frac{M'N'}{\cos A} = 2KN' = 2\rho'$$

(unde ρ' este raza celui de al doilea cerc Lemoine). Analog, $\frac{P'Q'}{\cos B} = \frac{R'S'}{\cos C} = 2\rho'$. □

Observaţia 981 *Al doilea cerc al lui Lemoine dotorită proprietăţii precedente se mai numeşte* ***cercul cosinus.***

Teorema 982 *Triunghiurile $R'M'P'$ şi $Q'S'N'$ au laturile paralele două câte două şi perpendiculare pe laturile triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece $R'\ N'$ şi $M'Q'$ sunt diametre în cercul $\mathcal{L}'$ rezultă că

$$m(\sphericalangle R'M'N') = m(Q'N'M') = 90^\circ,$$

deci $R'M' \parallel Q'N'$ şi $R'M' \perp BC$, $N'Q' \perp BC$. Analog, pentru celelalte perechi de laturi. □

Observaţia 983 *Deoarece patrulaterele $B'N'Q'R'$, $N'P'R'S'$ şi $S'M'P'Q'$ sunt dreptunghiuri rezultă că $R'Q' \parallel BC, N'P' \parallel AB$ şi $S'M' \parallel AC$.*

Teorema 984 *Triunghiurile $R'M'P'$ şi $Q'S'N'$ sunt congruente şi asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle S'N'Q') &= m(\sphericalangle S'P'Q') = m(\sphericalangle B), \\ m(\sphericalangle M'R'P') &= m(\sphericalangle M'Q'P') = m(\sphericalangle B), \end{aligned}$$

deci $\widehat{S'N'Q'} \equiv \widehat{M'R'P'}$. Deoarece $M'R' \parallel N'Q'$ şi $M'R' \perp BC, N'Q' \perp BC$ rezultă că patrulaterul $M'N'Q'R'$ este dreptunghi, $R'M' \equiv N'Q'$. Analog, $R'P' \equiv S'N'$, de unde rezultă că triunghiurile $R'M'P'$ şi $N'Q'S'$ sunt congruente şi asemenea cu triunghiul BCA. □

Teorema 985 *Într-un triunghi ABC, dreapta KH care uneşte punctul lui Lemoine cu ortocentrul triunghiului ABC este paralelă cu dreapta LO_9 care uneşte centrul primului cerc al lui Lemoine cu centrul cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC şi $KH = 2LO_9$.*

Demonstraţie. Deoarece L şi O_9 sunt mijloacele segmentelor OK, respectiv OH, rezultă că segmentul LO_9 este linie mijlocie în triunghiul OHK, deci $KH \parallel LO_9$ şi $KH = 2LO_9$. □