3.4 CERCUL LUI TAYLOR

„În geometrie nu există drumuri speciale pentru regi.” - Euclid[6]

Teorema 986 *Proiecţiile pe laturile unui triunghi ABC ale picioarelor înălţimilor triunghiului ABC sunt situate pe acelaşi cerc.*

Demonstraţie. Fie H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor triunghiului ABC şi $H_a^{'}$, $H_a^{''}$, $H_b^{'}$,$H_b^{''}$, $H_c^{'}$, $H_c^{''}$ proiecţiile punctelor, H_a, H_b, H_c pe laturile triunghiului ABC (Figura 3.16) ($H_a^{'}, H_a^{''} \in BC; H_b^{'}, H_b^{''} \in AC; H_c^{'}, H'' \in AB$). Patrulaterul $AH_a^{''}H_aH_a^{'}$ fiind in-

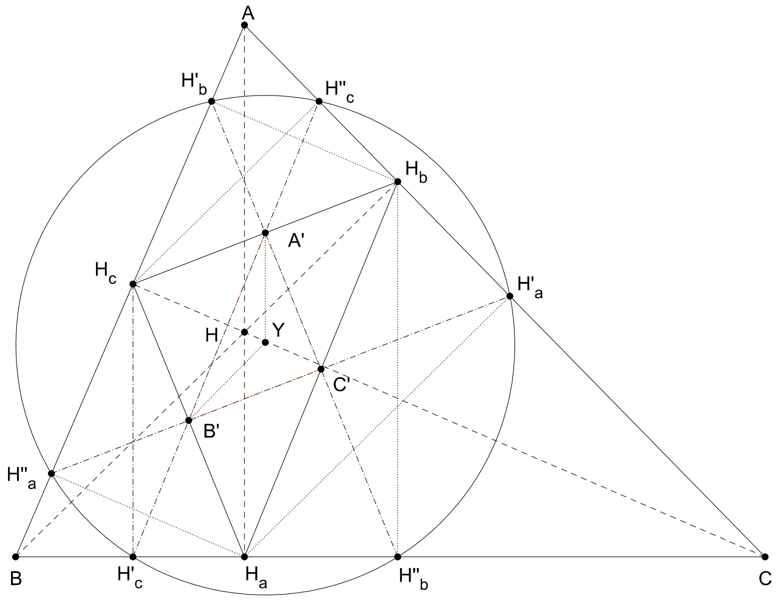

Figura 3.16: Cercul lui Taylor

scriptibil rezultă $\sphericalangle AH_a^{''}H_a^{'} \equiv \sphericalangle AH_aH_a^{'}$, dar $\sphericalangle H_aAH_a^{'} \equiv \sphericalangle ACB$ (fiind complemente ale unghiului $\sphericalangle H_aAC$), deci $\sphericalangle AH_a^{''}H_a^{'} \equiv \sphericalangle ACB$, adică patrulaterul $CH_a^{'}H_a^{''}B$ este inscriptibil, de unde rezultă că $H_a^{''}$ aparţine cercului circumscris triunghiului $H_c^{'}H_b^{''}H_a^{'}$. Analog, se arată că punctele $H_b^{'}$ şi $H_c^{''}$ aparţin aceluiaşi cerc. □

Observaţia 987 *Cercul pe care se găsesc punctele $H_a^{'}, H_a^{''}, H_b^{'}, H_b^{''}, H_c^{'}, H_c^{''}$ se numeşte* ***cercul lui Taylor***[7] *al triunghiului ABC. Notăm centrul cercului lui Taylor cu Y.*

Teorema 988 *Dreptele $H_a^{'}H_b^{''}$, $H_b^{'}H_c^{''}$, $H_c^{'}H_a^{''}$ sunt paralele cu laturile AB, BC, respectiv CA ale triunghiului ABC.*

[6]Euclid din Alexandria (330 – 275 î.e.n.) – matematician grec, contribuţii în geometrie

[7]Brook Taylor (1685-1731) – matematician englez, profesor la Universitatea din Cambridge, contribuţii importante în analiza matematică şi geometrie

Demonstraţie. Deoarece H_aH_b este antiparalelă cu BC, iar $H_a^{'}H_b^{''}$ este antiparalelă cu H_aH_b rezultă că $H_a^{''}H_b^{''} \parallel AB$. Analog se arată că $H_b^{''}H_c^{''} \parallel BC$ şi $H_a^{''}H_c^{''} \parallel CA$. $\square$

Teorema 989 *Triunghiurile $H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''}$ şi $H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'}$ sunt asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece $H_a^{'}H_a^{''}$ este antiparalelă cu rezultă $\sphericalangle H_a^{''}H_a^{'}H_c^{''} \equiv \sphericalangle ABC$. În cercul lui Taylor avem $\sphericalangle H_a^{''}H_b^{''}H'' \equiv \sphericalangle H_a^{''}H_a^{'}H_c^{'}$, de unde rezultă $\sphericalangle H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''} \equiv \sphericalangle ABC$. Analog $\sphericalangle H_a^{''}H_c^{''}H_b^{''} \equiv \sphericalangle ABC$, deci triunghiurile ABC şi $H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''}$ sunt asemenea. Analog se arată că $\sphericalangle H_b^{'}H_c^{'}H_a^{'} \equiv \sphericalangle H_b^{''}H_a^{''}H_a^{'} \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'} \equiv \sphericalangle ABC$, adică triunghiurile $H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'}$ şi ABC sunt asemenea . $\square$

Teorema 990 *Triunghiurile $H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''}$ şi $H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'}$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Deoarece punctele $H_a^{'}, H_a^{''}, H_b^{'}, H_b^{''}, H_c^{'}, H_c^{''}$ aparţin cercului lui Taylor şi triunghiurile $H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'}$ şi $H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''}$ sunt asemenea, atunci din $\sphericalangle H_c^{'}H_a^{'}H_b^{'} \equiv \sphericalangle H_c^{''}H_a^{''}H_b^{''}$ rezultă congruenţa coardelor $H_b^{'}H_c^{''}$ şi $H_b^{''}H_c^{'}$, adică triunghiurile $H_a^{''}H_b^{''}H_c^{''}$ şi $H_a^{'}H_b^{'}H_c^{'}$ sunt congruente. $\square$

Teorema 991 *Centrul cercului lui Taylor (Y) al triunghiului ascuţitunghic ABC este centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele laturilor H_bH_c, H_aH_c, H_aH_b ale triunghiului ortic. Deoarece dreptele $H_b^{'}H_b^{''}$ şi $H_c^{'}H_c^{''}$ trec prin A', C', respectiv A', B' (vezi [12, § III.1]) iar coardele $H_b^{'}H_c^{''}$ şi $H_c^{'}H_b^{''}$ sunt paralele, rezultă că triunghiurile $A'H_b^{'}H_c^{''}$ şi $A'H_c^{'}H_b^{''}$ sunt isoscele, deci bisectoarea unghiului $\sphericalangle H_b^{'}A'H_c^{''}$- adică bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$- este perpendiculară pe mijlocul coardei $H_b^{'}H_c^{''}$, ceea ce arată că bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$ trece prin centrul cercului lui Taylor. Analog se arată că bisectoarea unghiului $\sphericalangle A'B'C'$ trece prin centrul cercului lui Taylor, deci centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ortic al triunghiului ABC este centrul cercului lui Taylor (Y) al triunghiuluiABC. $\square$

Observaţia 992 *Centrul cercului lui Taylor (Y) al triunghiului ascuţitunghic ABC este punctul lui Spieker al triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Teorema 993 *Sunt adevărate relaţiile: $YA' \perp BC, YB' \perp CA$ şi $YC' \perp AB$.*

Demonstraţie. Deoarece YA' este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B'A'C'}$, patrulaterul $A'B'H_aC'$ este paralalogram şi AH_a bisectoarea unghiului $\widehat{B'H_aC'}$, rezultă că $YA' \parallel AH_a$. Dar $AH_a \perp BC$, de unde rezultă că $YA' \perp BC$. $\square$

Teorema 994 *Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor AH_bH_c, BH_cH_a, respectiv CH_aH_b. Triunghiurile $YB'C', YC'A', YA'B'$ sunt respectiv omotetice cu triunghiurile $H_1H_bH_c, H_2H_cH_a, H_3H_aH_b$.*

Demonstraţie. Deoarece $YB' \parallel H_cH_1$, $YC' \parallel H_bH_1$ şi $H_bH_c \parallel B'C'$, rezultă că triunghiurile $H_1H_bH_c$ şi $YB'C'$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $1/2$ deoarece $\frac{B'C'}{H_bH_c} = \frac{1}{2}$. $\square$

Teorema 995 *Centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC este mijlocul segmentelor H_aH_1, H_bH_2 şi H_cH_3.*

Demonstraţie. Deoarece $\frac{YB'}{H_cH_1} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{H_aB'}{H_aH_c} = \frac{1}{2}$, rezultă că triunghiurile H_aYB' şi $H_aH_1H_c$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $1/2$, deci prin această omotetie punctele H_a, Y, H_1 sunt coliniare şi $H_aY \equiv YH_1$. Analog se arată că Y este mijlocul segmentelor H_bH_2 şi H_cH_3. □

Teorema 996 *Triunghiurile $H_1H_2H_3$ şi $H_aH_bH_c$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Deoarece Y este mijlocul segmentelor H_aH_1, H_bH_2 rezultă că patrulaterul $H_aH_bH_1H_2$ este paralelogram, deci $H_aH_b \equiv H_1H_2$. Analog se arată că $H_bH_c \equiv H_2H_3$ şi $H_cH_a \equiv H_3H_1$, de unde rezultă că $\Delta H_1H_2H_3 \equiv \Delta H_aH_bH_c$. □

Teorema 997 *Cercul lui Taylor al triunghiului ABC este un cerc Tücker.*

Demonstraţie. Deoarece antiparalelele $H_a^{'}H_a^{''}$, $H_b^{'}H_b^{''}$ şi $H_c^{'}H_c^{''}$ (vezi [12, § III.1]) sunt congruente, rezultă că cercul lui Taylor este un cerc Tücker. □

Teorema 998 *Raza cercului lui Taylor are lungimea egală cu*

$$R_T = R\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 B}.$$

Demonstraţie. Fie P proiecţia lui Y pe dreapta $H_a^{'}H_a^{''}$, atunci YP este raza cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$, deci are lungimea jumătate din lungimea razei cercului înscris în triunghiul ortic, astfel $YP = R\cos A\cos B\cos C$ (vezi [12, § III.1]). Deoarece $H_a^{'}H_a^{''} = 2R\sin A\sin B\sin C$ (vezi [12, § III.1]), din triunghiul dreptunghic $YH_a^{'}P$ rezultă concluzia. □

Teorema 999 *Dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C', mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH, unde H este ortocentrul triunghiului ABC, în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ determină un triunghi $S_1S_2S_3$. Centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $S_1S_2S_3$.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Simson". □

Teorema 1000 *Cercul lui Taylor al triunghiului ABC este ortogonal cercurilor exînscrise triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ortic $H_aH_bH_c$. Din triunghiurile $AH_aH_a^{'}$ şi AH_aC rezultă $AH_a^{'} = AH_a\sin C = b\sin^2 C$, iar din triunghiurile $AH_cH_c^{''}$ şi ACH_c rezultă $AH_c^{''} = AH_c\cos A = b\cos^2 A$. Atunci,

$$AH_a^{'} \cdot AH_c^{''} = b^2\sin^2 C\cos^2 A = 4R^2\sin^2 B\sin^2 C\cos^2 A$$

şi ţinând cont că

$$AH_b = c\cos A = 2R\sin C\cos A$$

rezultă $AH_a^{'} \cdot AH_c^{''} = AH_b^2\sin^2 B = AZ^2$, unde Z este proiecţia lui A pe H_bH_c (adică pătratul razei cercului H_a- exînscris), deci cercul lui Taylor este ortogonal cercului H_a-exînscris; analog se arată şi ortogonalitatea celorlalte cercuri exînscrise cu cercul lui Taylor. □

Teorema 1001 *Fie $H_aH_bH_c$ şi $M_aM_bM_c$ triunghiul ortic, respectiv triunghiul median al unui triunghi ABC. Dreptele lui Simson ale punctelor M_a, M_b, M_c în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Simson". □

Teorema 1002 *Fie $H_aH_bH_c$ şi $M_aM_bM_c$ triunghiul ortic, respectiv triunghiul median al unui triunghi ABC.*

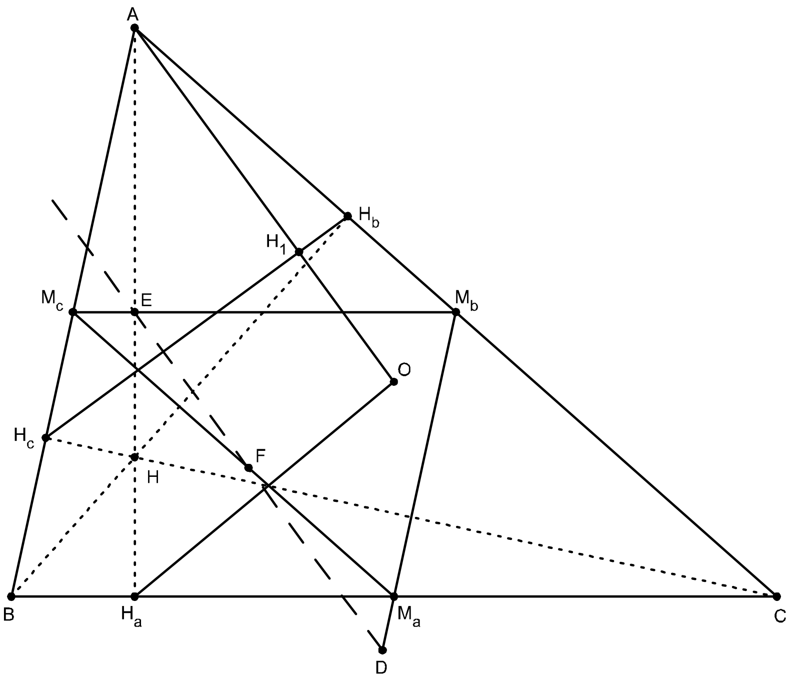

Figura 3.17: Drepte ale lui Simson concurente în centrul cercului lui Taylor

Demonstraţie. Fie D, E, F proiecţiile punctului H_a pe dreptele M_aM_b, M_bM_c, respectiv M_aM_c (Figura 3.17). Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului median $M_aM_bM_c$, deci dreapta DE trece prin punctul Q - mijlocul segmentului OH_a (vezi - „Dreapta lui Simson") şi deoarece $AE \equiv EH_a$, rezultă că EQ este linie mijlocie în triunghiul AH_aO.

Cum ortocentrul triunghiului AH_bH_c - punctul H_1- aparţine dreptei AO (deoarece $AO \perp H_bH_c$ - vezi [12, § III.1]) rezultă că mijlocul segmentului H_aH_1 - adică centrul cercului lui Taylor corespunzător triunghiului ABC – aparţine liniei mijlocii EQ, adică dreptei lui Simson a punctului H_a în raport cu triunghiul median. Analog se arată că şi dreptele lui Simson ale punctelor H_b, H_c în raport cu triunghiul $M_aM_bM_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Taylor al triunghiului ABC. □