3.5 CERCUL LUI TÜCKER

„Un matematician încearcă în opera sa aceeaşi plăcere ca şi un artist; plăcerea este tot atât de mare şi de aceeaşi natură. – Henri Poincaré[8]

Numim ***antiparalelă*** a laturii BC a triunghiului ABC, o dreaptă paralelă cu tangenta în vârful A la cercul circumscris triunghiului ABC.

Teorema 1003 *Dacă A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt trei antiparalele la laturile BC, CA, respectiv AB, ($A_1, B_2 \in AB; B_1, C_2 \in BC; C_1, A_2 \in CA$), ale triunghiului ABC, astfel încât $A_1A_2 \equiv B_1B_2 \equiv C_1C_2$, atunci punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.*

Demonstraţie. Avem: $\sphericalangle AA_1A_2 \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle B_1B_2B$ şi $A_1A_2 \equiv B_1B_2$, deci

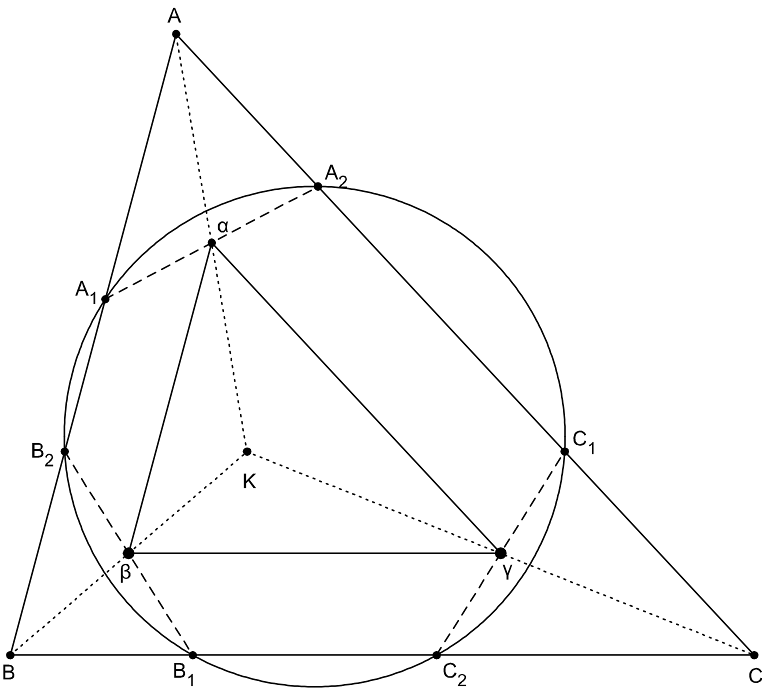

Figura 3.18: Cercul lui Tücker

patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ este trapez isoscel (Figura 3.18), deci punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt conciclice.

Analog, $C_2C_1A_2A_1$ este trapez isoscel, de unde rezultă $A_1C_2 || A_2C_1$ şi de aici

$$\widehat{A_1C_2B} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BB_2B_1},$$

[8]Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician şi fizician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

adică patrulaterul $A_1B_2B_1C_2$ este inscriptibil, deci punctul C_2 aparţine cercului circumscris patrulaterului $A_1A_2B_1B_2$. Analog se arată că C_1 este punct pe acest cerc, deci punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice. □

Cercul determinat de punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ se numeşte ***cercul lui Tücker***[9].

Teorema 1004 *Dacă α, β, γ sunt mijloacele antiparalelor A_1A_2, B_1B_2, respectiv C_1C_2, atunci triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi ABC sunt omotetice.*

Demonstraţie. Dreptele $A\alpha$, $B\beta$ si $C\gamma$ sunt simedianele triunghiului ABC, deci sunt concurente în punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC (vezi „Punctul lui Lemoine"). Atunci, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ şi $\gamma\alpha$ sunt linii mijlocii în trapezele $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, respectiv $C_1A_2A_1C_2$, deci

$$\alpha\beta || AB, \quad \beta\gamma || BC, \quad \gamma\alpha || CA,$$

deci triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi ABC sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC. □

Teorema 1005 *Centrul cercului lui Tücker aparţine dreptei lui Brocard.*

Demonstraţie. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt antiparalele la laturile triunghiului ABC, rezultă că perpendicularele duse din vârfurile A, B, respectiv C pe acestea sunt concurente în O (vezi „Drepte izogonale").

Deoarece triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi ABC sunt omotetice rezultă că perpendicularele duse din α, β, γ pe dreptele A_1A_2, B_1B_2, respectiv C_1C_2 sunt concurente într-un punct $\ddot{U}$ care aparţine dreptei OK. Cum $\ddot{U}$ aparţine mediatoarelor segmentelor A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2, rezultă că $\ddot{U}$ este centrul cercului lui Tücker. □

Teorema 1006 *Centrul cercului lui Tücker este centrul cercului circumscris triunghiului $\alpha\beta\gamma$.*

Demonstraţie. Evident, deoarece $\ddot{U}$ se află la egale distanţe de coardele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 în cercul lui Tücker. □

Teorema 1007 *Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Avem $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $C_1A_1 \equiv C_2A_2$ ca diagonale în trapeze isoscele, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt congruente. □

Teorema 1008 *Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1B_1C_1 &\equiv \sphericalangle A_1B_2C_1 \equiv \sphericalangle ABC, \\ \sphericalangle B_1C_1A_1 &\equiv \sphericalangle B_1C_2A_1 \equiv \sphericalangle ACB, \end{aligned}$$

rezultă că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea. Analog se arată că triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt asemenea. □

[9] Robert Tücker (1832-1905) – matematician englez, contribuţii în geometrie

Teorema 1009 *Un cerc Tücker determină cu laturile triunghiului ABC trei coarde paralele şi trei coarde antiparalele laturilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Evident A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt antiparalele laturilor BC, CA, respectiv AB, iar $B_2C_1||BC$, $C_2A_1||CA$, $A_2B_1||AB$. □

Teorema 1010 *Fie* $\{A'\} = A_1C_2 \cap A_2B_1$, $\{B'\} = B_2C_1 \cap A_2B_1$, $\{C'\} = B_2C_1 \cap A_1C_2$. *Triunghiurile $A'B'C'$ şi ABC.*

Demonstraţie. Patrulaterul $AA_1A'A_2$ este paralelogram, deci AA' trece prin mijlocul segmentului A_1A_2, deci este simediană. Atunci, dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC. Evident $A'B'||AB$, $B'C'||BC$, $C'A'||CA$, deci triunghiurile $A'B'C'$ şi ABC sunt omotetice. □

Teorema 1011 *Primul cerc al lui Lemoine este un cerc Tücker.*

Demonstraţie. Antiparalelele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt congruente în cercul lui Lemoine (vezi „Cercul lui Lemoine"), deci primul cerc al lui Lemoine este un cerc Tücker. □

Observaţia 1012 *În acest caz triunghiul $\alpha\beta\gamma$ se reduce la punctul K, iar $\ddot{U}$ este mijlocul segmentului OK.*

Teorema 1013 *Al doilea cerc al lui Lemoine este un cerc Tücker.*

Demonstraţie. Antiparalelele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 fiind congruente în cercul $\mathcal{L}$' rezultă că $\mathcal{L}$' este un cerc Tücker (vezi „Cercul lui Lemoine"). □

Observaţia 1014 *Al doilea cerc al lui Lemoine este cercul Tücker în care antiparalelele sunt congruente şi concurente.*

Teorema 1015 *Cercul lui Taylor al triunghiului ABC este un cerc Tücker.*

Demonstraţie. Vezi „Cercul lui Taylor". □