3.6 CERCURILE LUI LUCAS

„Universul este un cerc al cărui centru este pretutindeni, iar circumferinţa nicăieri." – Blaise Pascal[10]

Teorema 1016 *Să se arate că există trei cercuri C_1, C_2, C_3 tangente interior la cercul circumscris triunghiului ABC în vârfurile A, B, C şi tangente între ele două câte două.*

Demonstraţie. Presupunem cercurile construite, fie $C_1(L_1, l_1), C_2(L_2, l_2), C_3(L_3, l_3)$ (Fifura 3.19). Deoarece cercurile sunt tangente interior cercului circumscris al triunghi-

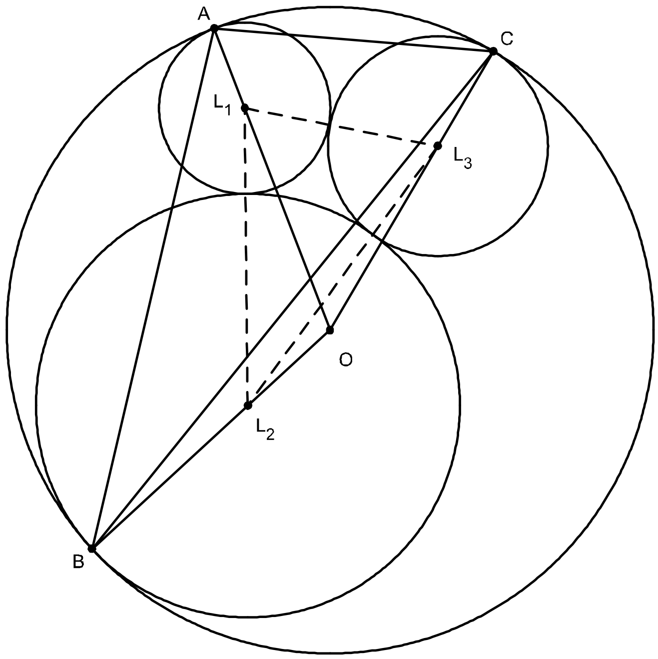

Figura 3.19: Cercurile lui Lucas

ului ABC rezultă că $L_1 \in OA; L_2 \in OB; L_3 \in OC$ (unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Teorema cosinusului aplicată în triunghiurile L_2L_3O şi OBC ne dă: $\cos\sphericalangle L_2OL_3 = \cos\sphericalangle BOC$ sau

$$\frac{(R-l_2)^2+(R-l_3)^2-(l_2+l_3)^2}{2(R-l_2)(R-l_3)} = \frac{R^2+R^2-a^2}{2R^2}$$

de unde

$$4R^2 l_2 l_3 = a^2(R-l_2)(R-l_3). \tag{i}$$

[10] Blaise Pascal (1623 – 1662) – matematician, fizician şi filosof francez, contribuţii în geometria proiectivă, algebră şi teoria probabilităţilor

Analog, se demonstrează că $4R^2l_1l_3 = b^2(R - l_1)(R - l_3)$ şi $4R^2l_1l_2 = c^2(R - l_1)(R - l_2)$ (ii). Înmulţind membru cu membru relaţiile (i) şi (ii) rezultă

$$8R^3l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = abc(R - l_1)(R - l_2)(R - l_3) \quad \text{(iii)}$$

sau

$$4R^2l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = ah_a(R - l_1)(R - l_2)(R - l_3) \quad \text{(iv)}$$

Relaţile (iii) şi (iv) prin împărţire dau $l_1 = \frac{h_a(R-l_1)}{a}$ şi analog $l_2 = \frac{h_b(R-l_2)}{b}, l_3 = \frac{h_c(R-l_3)}{c}$,de unde se obţine

$$l_1 = \frac{Rh_a}{a + h_a}, l_2 = \frac{Rh_b}{b + h_b}, l_3 = \frac{Rh_c}{c + h_c},$$

(unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor triunghiului ABC). Deci, cercurile având centrele pe razele OA, OB, respectiv OC şi razele $AL_1 = l_1, BL_2 = l_2$ şi CL_3 sunt cercurile căutate. □

Observaţia 1017

1) Cercurile $C_1(L_1, l_1), C_2(L_2, l_2), C_3(L_3, l_3)$ se numesc ***cercurile Lucas interioare*** ale triunghiului ABC.

2) Razele cercurilor Lucas interioare au lungimile

$$l_1 = \frac{Rh_a}{a + h_a}, l_2 = \frac{Rh_b}{b + h_b}, l_3 = \frac{Rh_c}{c + h_c}$$

(unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor triunghiului ABC, iar R raza cercului circumscris triunghiului ABC).

3) Deoarece $h_a = \frac{bc \sin A}{a} = \frac{bc}{2R}$, rezultă

$$l_1 = \frac{Rbc}{bc + 2aR}, l_2 = \frac{Rca}{ca + 2bR}, l_3 = \frac{Rab}{ab + 2cR}.$$

4) Laturile triunghiului $L_1L_2L_3$ au lungimile egale cu

$$L_1L_2 = l_1 + l_2, L_2L_3 = l_2 + l_3, L_3L_1 = l_3 + l_1$$

Teorema 1018 *Dacă l_1, l_2, l_3 sunt razele cercurilor Lucas interioare, atunci*

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = \frac{3}{R} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat utilizând observaţia 1017. □

Teorema 1019 *Sunt adevărate relaţiile: $OL_1 = \frac{2aR}{bc}l_1, OL_2 = \frac{2bR}{ca}l_2, OL_3 = \frac{2cR}{ab}l_3$.*

Demonstraţie. Avem $OL_1 = OA - AL_1 = R - l_1 = \frac{2aR}{bc}l_1$. □

Teorema 1020 *Să se arate că există trei cercuri C_1', C_2', C_3' tangente exterior la cercul circumscris triunghiului ABC şi tangente între ele, două câte două.*

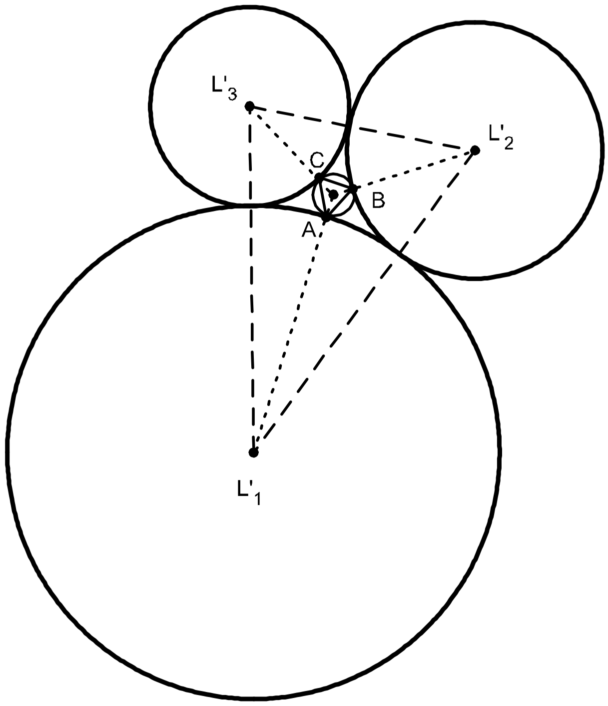

Figura 3.20: Cercurile Lucas exterioare

Demonstraţie. Presupunem cercurile construite. Fie $L_1^{'}, L_2^{'}, L_3^{'}$ centrele lor şi $l_1^{'}, l_2^{'}$, respectiv $l_3^{'}$ razele acestor cercuri (Figura 3.20). Printr-un raţionament analog celui precedent se determină razele acestor cercuri ca fiind

$$l_1^{'} = \frac{Rh_a}{|a-h_a|}, l_2^{'} = \frac{Rh_b}{|b-h_b|}, l_3^{'} = \frac{Rh_c}{|c-h_c|},$$

(unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor triunghiului ABC, deci cele trei cercuri pot fi construite, având centrele pe semidreptele $(OA, (OB, (OC$ şi razele $AL_1^{'} = l_1^{'}, BL_2^{'} = l_2^{'}$, respectiv $CL_3^{'} = l_3^{'}$). □

Observaţia 1021

1) Cercurile $C_1^{'}(L_1^{'}, l_1^{'}), C_2^{'}(L_2^{'}, l_2^{'}), C_3^{'}(L_3^{'}, l_3^{'})$ se numesc ***cercurile Lucas exterioare.***
2) Razele cercurilor Lucas au lungimile: $l_1^{'} = \frac{Rh_a}{|a-h_a|}, l_2^{'} = \frac{Rh_b}{|b-h_b|}, l_3^{'} = \frac{Rh_c}{|c-h_c|}$.

Teorema 1022 *Cercurile Lucas $C_1, C_2, C_3, C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'}$ sunt tangente la cercurile Apollonius ale vârfurilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Ţinând cont că cercurile Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC sunt ortogonale cercului circumscris triunghiului ABC, demonstraţia este evidentă. □