3.7 CERCURILE LUI APOLLONIUS

„Demonstraţia este idolul în faţa căruia matematicianul pur se torturează." - Arthur Eddington[11]

Teorema 1023 *Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe este o constantă $k \neq 1$ este un cerc.*

Demonstraţie. Fie A şi B punctele fixe şi P un punct ce aparţine locului geome - tric, adică $\frac{PA}{PB} = k \neq 1$. Fie C şi D sunt picioarele bisectoarelor interioare şi exterioare a unghiului $\sphericalangle APB$. Din teorema bisectoarei rezultă

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k,$$

deci punctele C şi D aparţin locului geometric. Deoarece $m(\sphericalangle CPD) = 90°$, rezultă că punctul P aparţine cercului de diametru CD unde punctele C şi D sunt punctele fixe determinate mai sus (Figura 3.21). Fie $C, D \in AB$ astfel încât

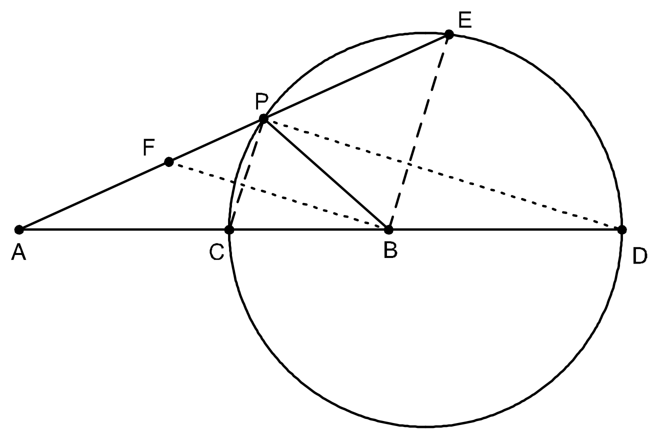

Figura 3.21: Cerc al lui Apollonius corespunzător vârfului A

$$\frac{CA}{CD} = \frac{DA}{DB} = k \qquad \text{(i)}$$

şi P un punct pe cercul de diametru CD. Vom arăta că $\frac{PA}{PB} = k$, deci locul geometric va fi cercul de diametru CD. Fie $BE \parallel PC$ şi $BF \parallel PD$, $E, F \in AP$. Atunci, din teorema lui Thales rezultă:

$$\frac{PA}{PF} = \frac{DA}{DB}, \; \frac{PA}{PE} = \frac{CA}{CB}$$

[11] Arthur Eddington (1882-1944) – astrofizician englez, contribuţii importante în teoria relativităţii

care împreună cu relaţia (i) dau $\frac{PA}{PF} = \frac{PA}{PE}$ şi de aici $PF = PE$. Deoarece $m(\sphericalangle CPD) = 90°$ şi $BE \parallel PC$, $BE \parallel PC$ rezultă $m(\sphericalangle FBE) = 90$, adică PB este mediană în triunghiul FBE, deci $m(\sphericalangle PBF) = m(\sphericalangle PFB)$ (ii). Dar $m(\sphericalangle PBF) = m(\sphericalangle BPD)$ (iii) (unghiuri alterne interne), iar $m(\sphericalangle EPD) = m(\sphericalangle EPB)$ (iv) (unghiuri corespondente). Din relaţiile (ii), (iii) şi (iv) rezultă că $m(\sphericalangle BPD) = m(\sphericalangle EPD)$, adică PD este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle APB$ şi din teorema bisectoarei rezultă $\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB} = k$, ceea ce arată că locul geometric căutat este cercul de diametru CD. □

Fiind dat triunghiul ABC, se numeşte ***cerc al lui Apollonius***[12] corespunzător vârfului A, cercul loc geometric al punctelor P din planul triunghiului ABC pentru care $bPB = cPC$ (unde b, c sunt lungimile laturilor AC, respectiv AB). Analog, se defineşte cercul lui Apollonius corespunzător vârfului B (respectiv C) ca fiind locul geometric al punctelor P din planul triunghiului ABC pentru care $\frac{PC}{PA} = \frac{a}{c}$ (respectiv $\frac{PA}{PB} = \frac{b}{a}$). Cercul lui Apollonius corespunzător vârfului A, conţine punctul A şi are ca diametru segmentul determinat de picioarele bisectoarelor interioare şi exterioare ale unghiului A.

Teorema 1024 *Centrele cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC sunt punctele de intersecţie ale dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC cu laturile acestui triunghi.*

Demonstraţie. Fie D_1 şi D_2 picioarele bisectoarelor interioare, respectiv exterioare ale unghiului $\sphericalangle A$ şi M mijlocul segmentului D_1D_2, adică centrul cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A (Figura 3.22). Deoarece $D_1A \perp D_2A$ avem $L_aA =$

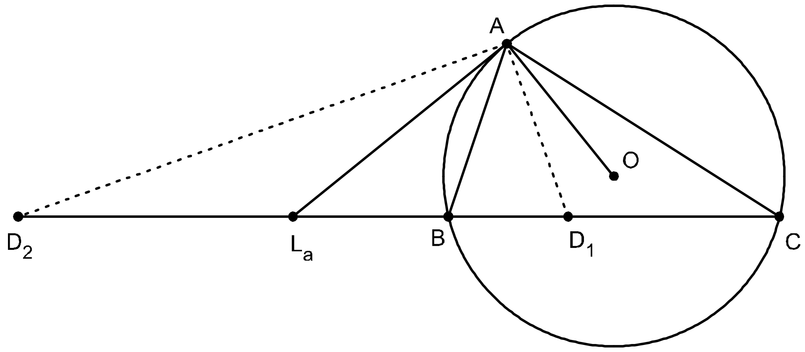

Figura 3.22: Dreapta lui Lemoine

$L_aD_1 = L_aD_2$ şi de aici rezultă că $m(\sphericalangle D_2AL_a) = m(\sphericalangle L_aAD_2)$ şi $m(\sphericalangle L_aAD_1) = m(\sphericalangle L_aD_1A)$. Atunci,

$$m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle L_aD_1A) - m(\sphericalangle D_1AC)$$

$$= m(\sphericalangle L_aAD_1) - m(\sphericalangle BAD_1) = m(\sphericalangle L_aAB),$$

[12] Apollonius (262-190 î.H.) – matematician grec, contribuţii fundamentale în geometrie

ceea ce arată că dreapta L_aA este tangentă în A la cercul circumscris triunghiului ABC, adică punctul L_a aparţine dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC. Analog, se arată că şi centrele celorlalte două cercuri ale lui Apollonius aparţin dreptei lui Lemoine. □

Observaţia 1025 *Centrele cercurilor lui Apollonius aparţin dreptei lui Lemoine al triunghiului.*

Teorema 1026 *Cercurile lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului sunt ortogonale cercului circumscris.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă (de exemplu pentru cercul A-Apollonius avem $L_aA \perp OA$). □

Teorema 1027 *Dacă S este un punct comun cercurilor lui Apollonius corespunzător vârfurilor A şi B ale unui triunghi ABC, atunci punctul S aparţine şi cercului lui Apollonius corespunzător vârfului C.*

Demonstraţie. Deoarece S este un punct comun cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor A şi B, avem: $bSB = cSC$ şi respectiv $aSA = cSC$, de unde rezultă $aSA = bSB$, adică punctul S aparţine şi cercului lui Apollonius corespunzător vârfului C. □

Punctul S din planul triunghiului ABC pentru care $aSA = bSB = cSC$ (unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB) se numeşte ***punct izodinamic*** al triunghiului ABC.

Teorema 1028 *Raza cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A al unui triunghi ABC este egală cu $R_A = \frac{abc}{|b^2-c^2|}$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $AC > AB (b > c)$ (Figura 3.22). Folosind teorema bisectoarei şi proporţiile derivate din aceasta rezultă $BD_1 = \frac{ac}{b+c}$ şi $D_2B = \frac{ac}{b-c}$. Atunci, $D_1D_2 = D_1B + BD_2$ dau $D_1D_2 = 2R_A = \frac{2abc}{b^2-c^2}$, de unde $R_A = \frac{abc}{b^2-c^2}$. □

Observaţia 1029 *Analog se arată că razele cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor B şi C sunt $R_B = \frac{abc}{|a^2-c^2|}$, respectiv $R_C = \frac{abc}{|b^2-a^2|}$.*

Teorema 1030 *Axa radicală a unui cerc Apollonius corespunzător unui vârf al triunghiului ABC şi a cercului circumscris triunghiului ABC este simediana corespunzătoare vârfului comun celor două cercuri.*

Demonstraţie. Fie T al doilea punct de intersecţie dintre cercul lui Apollonius corespunzător vârfului A şi cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 3.23). Atunci $b \cdot TB = c \cdot TC$, iar din teorema sinusurilor

$$TB = 2R\sin(\sphericalangle BAT), TC = 2R\sin(\sphericalangle TAC),$$

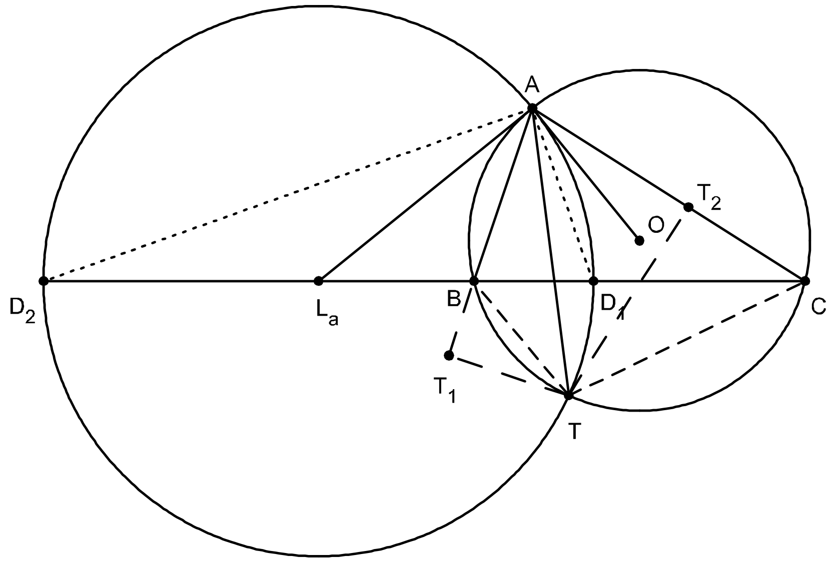

Figura 3.23: Axa radicală a unui cerc Apollonius

deci $b\sin(\sphericalangle BAT) = c\sin(\sphericalangle TAC)$. Dacă T_1 şi T_2 sunt proiecţiile lui T dreptele AB, respectiv AC, atunci $\sin(\sphericalangle TAB) = \frac{T_1T}{AT}$ şi $\sin(\sphericalangle TAC) = \frac{TT_2}{AT}$. Relaţia precedentă devine:

$$\frac{b}{TT_2} = \frac{c}{TT_1},$$

adică distanţele de la punctul T la laturile AB, respectiv AC sunt respectiv proporţionale cu lungimile acestora. Atunci, AT este simediana din A, adică axa radicală a cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A şi a cercului circumscris triunghiului ABC este simediana din A. □

Observaţia 1031 *Cercurile lui Apollonius intersectează cercul circumscris după simedianele triunghiului.*

Teorema 1032 *Punctul lui Lemoine are puteri egale faţă de cercurile lui Apollonius.*

Demonstraţie. Punctul lui Lemoine este punctul de intersecţie al simedianelor – privite ca axe radicale pentru cercurile lui Apollonius şi cercul circumscris triunghiului. □

Teorema 1033 *Dreapta OK este axa radicală a cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece cercurile lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC sunt ortogonale cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă că pu - terea lui O faţă de cercurile lui Apollonius este egală cu R^2, deci O aparţine axei radicale a cercurilor lui Apollonius. Cum şi punctul lui Lemoine K aparţine acestei axe rezultă că OK este axa radicală a cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC. □

Teorema 1034 *Fie P şi P' două puncte, simetrice faţă de BC, ale cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A al triunghiului ABC. Dreptele PA şi $P'A$ sunt izogonale.*

Demonstraţie. Fie P şi P' puncte ce aparţin cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A şi aparţin discului având centrul în centrul circumscris triunghiului ABC şi raza egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar D_1 şi D_2 picioarele bisectoarelor interioare, respectiv exterioare ce pleacă din A. (Figura 3.24). Deoarece

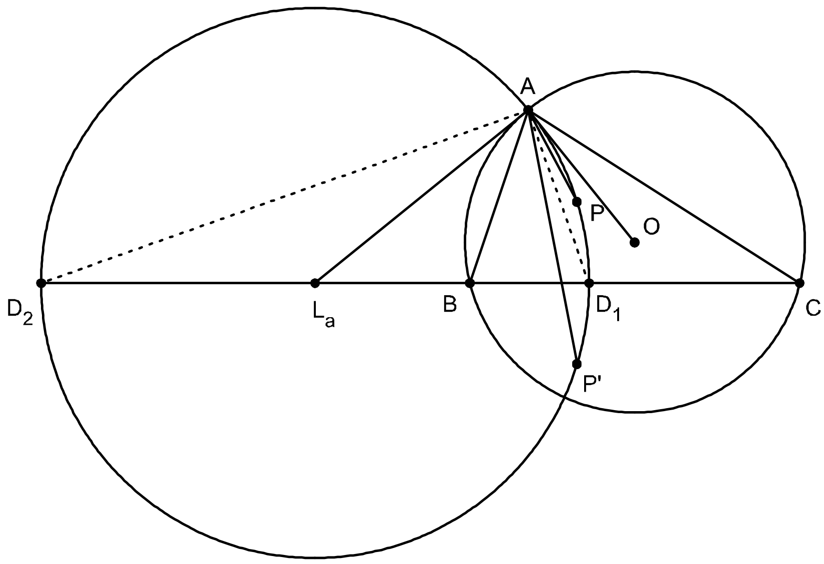

Figura 3.24: Dreptele PA şi $P'A$ sunt izogonale

$m(\widehat{PD_1}) = m(\widehat{P'D_1})$ rezultă $m(\sphericalangle D_1AP) = m_a(\sphericalangle P^{'}AD_1)$ adică dreptele AP şi AP' sunt izogonale. Dacă punctele P şi P' sunt în exteriorul discului considerat anterior, atunci AP şi AP' sunt izogonale faţă de bisectoarea exterioară a unghiului A. □

Teorema 1035 *Triunghiul podar al unui punct P de pe un cerc al lui Apollonius, în raport cu triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstraţie. Fie $P_aP_bP_c$ triunghiul podar al punctului P situat pe cercul lui Apollonius al punctului A (Figura 3.25). Patrulaterele PP_bCP_a şi PP_aBP_c fiind inscriptibile rezultă:

$$m(\sphericalangle P_aPP_b) = 180^\circ - m(\sphericalangle ACB) \text{ şi } m(\sphericalangle P_aPP_c) = m(\sphericalangle ABC),$$

de unde obţinem $P_aP_b = CP\sin(\sphericalangle C)$ şi $P_aP_c = BP\sin(\sphericalangle B)$. Cum

$$\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B},$$

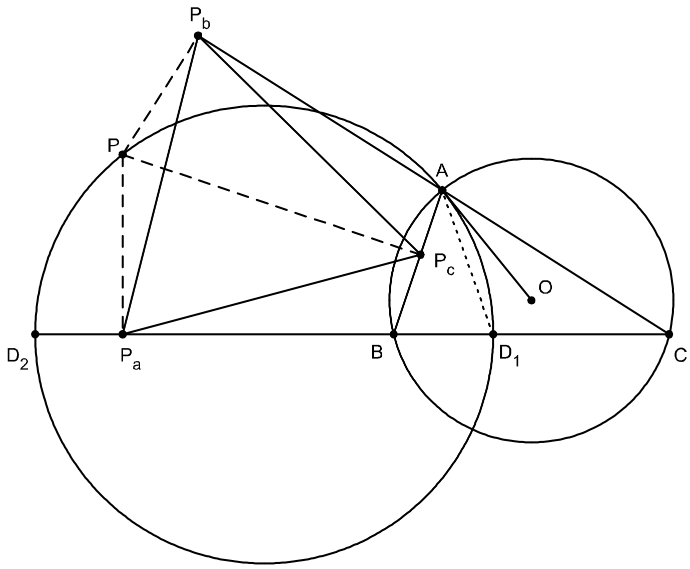

Figura 3.25: Triunghiul podar al unui punct P de pe un cerc al lui Apollonius

rezultă $P_aP_b = P_aP_c$, adică triunghiul $P_aP_bP_c$ este isoscel. □

Teorema 1036 *Dacă L_a este centrul cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A al triunghiului ABC, atunci* $\frac{L_aB}{L_aC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Demonstraţie. Deoarece L_aA este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC şi $m(\sphericalangle L_aAB) = m(\sphericalangle ACL_a)$ rezultă că triunghiurile L_aAB şi L_aAC sunt asemenea deci, $\frac{L_aB}{L_aA} = \frac{AB}{AC} = \frac{L_aA}{L_aC}$, de unde rezultă

$$\frac{L_aB}{L_aA} \cdot \frac{L_aA}{L_aC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC},$$

deci $\frac{L_aB}{L_aC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. □

Teorema 1037 *Punctele izodinamice ale triunghiului ABC neechilateral sunt punctele de intersecţie dintre dreapta OK şi cercurile lui Apollonius.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izodinamice”. □

Teorema 1038 *Cercurile Lucas sunt tangente la cercurile Apollonius ale vârfurilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile lui Lucas”. □