3.8 CERCURILE ADJUNCTE

„Poezia este o ştiinţă la fel de exactă ca şi geometria."- Gustave Flaubert[13]

Un cerc ce trece prin două vârfuri ale unui triunghi şi este tangent la una din laturile triunghiului se numeste ***cerc adjunct***. Unui triunghi îi corespund şase cercuri adjuncte. Notăm, de exemplu, cercul adjunct ce trece prin C şi este tangent în A la AB cu $C\overline{A}$. Atunci, cercurile adjuncte $C\overline{A}, A\overline{B}, B\overline{C}$ trec prin primul punct al lui Brocard (Ω) - fie O_A, O_B, respectiv O_C centrele lor -, iar cercurile adjuncte $A\overline{C}$,$C\overline{B}$, $B\overline{A}$ trec prin al doilea punct al lui Brocard (vezi „Punctele lui Brocard") - fie $O_C^{'}, O_B^{'}$,respectiv $O_A^{'}$ centrele lor.

Teorema 1039 *Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC. Razele cercurilor adjuncte corespunzătoare triunghiului ABC sunt egale cu $R\frac{c}{b}$, $R\frac{b}{c}$, $R\frac{a}{c}$, $R\frac{c}{a}$, $R\frac{b}{a}$, $R\frac{a}{b}$ (unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB).*

Demonstraţie. Fie R_B şi $R_C^{'}$ razele cercurilor adjuncte $A\overline{B}$, respectiv $A\overline{C}$, iar O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 3.26). În triunghiul $OO_C^{'}C$

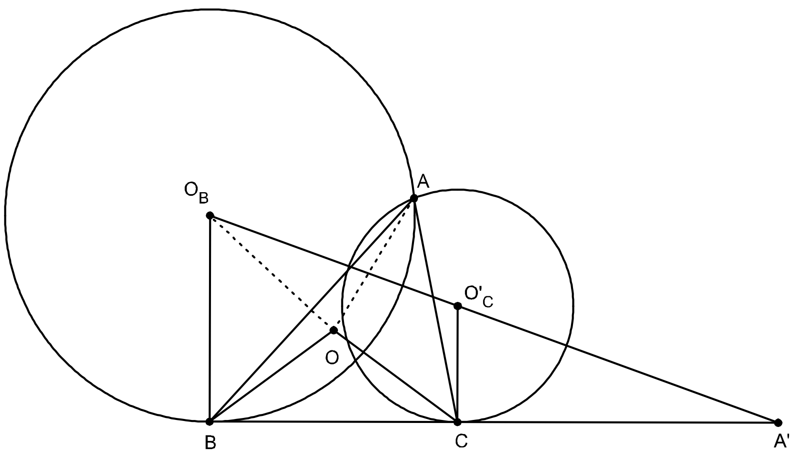

Figura 3.26: Cercurile adjuncte

avem $\widehat{OO_C^{'}C} \equiv \widehat{ACB}$, având laturile respectiv perpendiculare, iar $\widehat{O_C^{'}OC} \equiv \widehat{ABC} \left(= \frac{1}{2}m(\widehat{AOC})\right)$, deci triunghiurile ABC şi $OO_C^{'}C$ sunt asemenea, de unde $\frac{R_C^{'}}{b} = \frac{R}{c}$, adică $R_C^{'} = R \cdot \frac{b}{c}$ şi analog $R_B = R \cdot \frac{c}{b}$. Analog se determină razele celorlalte patru cercuri adjuncte. □

Observaţia 1040 *Aplicaţia de mai sus ne permite să determinăm razele cercurilor adjuncte atunci când cunoaştem laturile triunghiului şi raza cercului circumscris acestuia.*

[13] 1Gustave Flaubert (1821-1880) – scriitor francez

Teorema 1041 *Raza cercului circumscris unui triunghi este medie geometrică a razelor a două cercuri tangente la aceeaşi latură a triunghiului.*

Demonstraţie. Din $RB = R \cdot \frac{c}{b}$ şi $R_C^{'} = R \cdot \frac{b}{c}$ rezultă $RB \cdot R_C^{'} = R^2$, adică $R = \sqrt{RB \cdot R_C^{'}}$. □

Teorema 1042 *Cubul razei cercului circumscris triunghiului ABC este egal cu produsul razelor cercurilor adjuncte care trec prin acelaşi punct Brocard.*

Demonstraţie. Avem $RA = R \cdot \frac{b}{a}$, $RB = R \cdot \frac{c}{b}$, $RC = \frac{a}{c}$, $R'A = R \cdot \frac{c}{a}$, $R'B = R \cdot \frac{a}{b}$, $R'C = R \cdot \frac{b}{c}$ de unde

$$R^3 = R_A \cdot R_B \cdot R_C = R_A^{'} \cdot R_B^{'} \cdot R_C^{'}.$$

□

Teorema 1043 *Linia centrelor a două cercuri adjuncte, tangente la aceeaşi latură a triunghiului, intersectează latura în acelaşi punct cu simediana exterioară a vârfului opus acestei laturi.*

Demonstraţie. Fie $\{A'\} = O_B O_C^{'} \cap BC$. Din asemănarea triunghiurilor $OBBA'$ şi $O_C^{'} C A'$ rezultă

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{R_C^{'}}{R_B} = \left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

deci A' coincide cu punctul în care simediana exterioară a vârfului A intersectează dreapta BC (vezi „Simediane exterioare"). □

Teorema 1044 *Punctele de intersecţie dintre dreptele ce unesc centrele perechilor de cercuri adjuncte, tangente la aceeaşi latură a triunghiului, şi laturile respective coliniare.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' punctele căutate. Conform proprietăţii precedente avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2, \frac{B'C}{B'A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2, \frac{C'A}{C'B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

de unde $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A', B', C' sunt coliniare. □

Teorema 1045 *Triunghiurile $O_A O_B O_C$ şi $O_A^{'} O_B^{'} O_C^{'}$ sunt asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Dacă Ω este primul punct Brocard, atunci $m(\sphericalangle A\Omega B) = 180° - m(\sphericalangle ABC)$, $m(\sphericalangle B\Omega C) = 180° - m(\sphericalangle ACB)$, $m(\sphericalangle C\Omega A) = 180° - m(\sphericalangle BAC)$ (vezi „Punctele lui Brocard"). Fie $\{M\} = O_A O_B \cap A\Omega$ şi $\{N\} = O_A O_C \cap \Omega C$. Cum $O_A O_B \perp A\Omega$ şi $O_A O_C \perp \Omega C$ rezultă că patrulaterul $O_A M \Omega N$ este inscriptibil, deci

$$m(\sphericalangle N O_A M) = 180° - m(\sphericalangle M\Omega N) = m(\sphericalangle BAC),$$

de unde $\sphericalangle O_B O_A O_C \equiv \sphericalangle BAC$. Analog se arată că $\sphericalangle O_A O_B O_C \equiv \sphericalangle ABC$, deci triunghiurile $O_A O_B O_C$ şi ABC sunt asemenea. Analog se arată că triunghiurile $O_A^{'} O_B^{'} O_C^{'}$ şi ABC sunt asemenea. □

Teorema 1046 *Triunghiurile* $O_AO_BO_C$ *şi* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ *au acelaşi unghi Brocard.*

Demonstraţie. Vezi proprietatea precedentă. □

Teorema 1047 *Centrul cercului circumscris triunghiului* ABC *este un punct Brocard pentru triunghiurile* $O_AO_BO_C$ *şi* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$.

Demonstraţie. Avem $OO_A \perp AC, OO_A \perp O_CO_A$, iar $m(\sphericalangle \Omega CA) = \omega$, de unde rezultă că $m(\widehat{OO_AO_C}) = \omega$. Analog

$$m(\sphericalangle OO_BO_A) = m(\sphericalangle OO_CO_B) = \omega,$$

deci O este punct Brocard în triunghiul $O_AO_BO_C$. Analog se arată că O este punct Brocard şi în triunghiul $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$. □

Teorema 1048 *Primul punct Brocard al triunghiului* ABC *este primul punct Brocard şi în triunghiul* $O_AO_BO_C$.

Demonstraţie. Fie $\{P\} = O_BO_C \cap AB$. Deoarece PM este linie mijlocie în triunghiul $AB\Omega$ rezultă $PM \parallel AB$, de unde

$$m(\sphericalangle PM\Omega) = m(\sphericalangle BA\Omega) = \omega.$$

Din patrulaterul inscriptibil $O_BP\Omega M$ rezultă $\sphericalangle PO_B\Omega \equiv \sphericalangle PM\Omega$, deci $m(\sphericalangle PO_B\Omega) = \omega$. Analog,

$$m(\sphericalangle \Omega O_CO_A) = m(\sphericalangle \Omega O_AO_B) = \omega,$$

deci Ω este primul punct Brocard al triunghiului $O_AO_BO_C$. □

Teorema 1049 *Al doilea punct Brocard* Ω' *al triunghiului* ABC *este al doilea punct Brocard şi în triunghiului* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$.

Demonstraţie. Soluţie analoagă cu cea precedentă. □

Observaţia 1050 *i) Din cele prezentate mai sus rezultă că în triunghiul* $O_AO_BO_C$ *primul punct Brocard este* Ω *şi al doilea punct Brocard este* O *- centrul cercului circumscris triunghiului* ABC. *ii) În triunghiul* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ *primul punct Brocard este* O, *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC,*şi al doilea punct Brocard este* Ω' *(al doilea punct Brocard al triunghiului* ABC*).*

Teorema 1051 *Fie* ρ *raza cercului circumscris triunghiului* $O_AO_BO_C$. *Este adevarată relaţia:*

$$OO_A \cdot OO_B \cdot OO_C = 8\rho^3 \sin^3 \omega.$$

Demonstraţie. Din formula cunoscută $A\Omega \cdot B\Omega \cdot C\Omega = 8R^3 \sin^3 \omega$ (vezi "Punctele lui Brocard") şi asemănarea triunghiurilor $O_AO_BO_C$ şi ABC rezultă concluzia. □

Teorema 1052 *Dacă* ρ *este raza cercului circumscris triunghiului* $O_AO_BO_C$, *atunci* $R = 2\rho \sin \omega$.

Demonstraţie. Din paralelogramul $OO_BBO_B^{'}$ rezultă $OO_B = BO_B^{'} = R_B^{'} = R\frac{a}{b}$. Analog, $OO_A = R\frac{c}{a}$ şi $OO_C = R\frac{b}{c}$. Utilizând relaţia

$$OO_A \cdot OO_B \cdot OO_C = 8\rho^3 \sin^3 \omega$$

rezultă $R^3 = 8\rho^3 \sin^3 \omega$, de unde $R = 2\rho \sin \omega$. □

Observaţia 1053 *i) Relaţia* $R = 2\rho \sin \omega$ *este echivalentă cu* $\frac{R}{\rho} = 2 \sin \omega$ *şi cum triunghiurile* ABC *şi* $O_AO_BO_C$ *sunt asemenea rezultă că raportul de asemănare dintre acestea este egal cu* $2 \sin \omega$. *ii) Deoarece unghiul lui Brocard este acelaşi şi pentru triunghiul* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ *rezultă că raportul de asemănare dintre triunghiurile* ABC *şi* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ *este egal tot cu* $2 \sin \omega$, *de unde rezultă că triunghiurile asemenea* $O_AO_BO_C$ *şi* $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ *sunt congruente.*

Teorema 1054 *Dacă* A_2 *este punctul de intersecţie dintre cercurile adjuncte* $C\overline{A}$ *şi* $B\overline{A}$, *atunci punctul* A_2 *aparţine cercului circumscris triunghiului* BOC.

Demonstraţie. Vezi [12, § III.14]. □

Teorema 1055 *Vârfurile celui de-al doilea triunghi Brocard al triunghiului* ABC *sunt intersecţiile dintre cercurile adjuncte corespunzătoare vârfurilor* A, B *respectiv* C.

Demonstraţie. Vezi [12, § III.14]. □

Teorema 1056 *Axa radicală dintre două cercuri adjuncte tangente, în acelaşi vârf, a două laturi ale triunghiului* ABC *este simediana acestui vârf.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.14]. □

Teorema 1057 *Axa radicală dintre două cercuri adjuncte ce trec prin acelaşi vârf şi sunt tangente la aceeaşi latură unui triunghi este mediana ce pleacă din vârful considerat.*

Demonstraţie. Fie L_a punctul de intersecţie dintre cercurile adjuncte ce trec prin A şi sunt tangete în B, respectiv în C la BC, iar $\{M_a\} = AL_a \cap BC$. Din puterea punctului M_a faţă de cele două cercuri rezultă

$$M_a^{'}B^2 = M_aL_a \cdot M_aA = M_aC^2,$$

de unde $M_aB \equiv M_aC$, deci AM_a este mediană în triunghiul ABC. □

Observaţia 1058 *Punctul* L_a *aparţine cercului ortocentroidal al triunghiului* ABC (*vezi "Cercul ortocentroidal"*).