3.9 CERCUL ORTOCENTROIDAL

„Fiecare posedă un anumit orizont. Când se îngustează şi devine infinit de mic el se transformă în punct şi atunci zice: *Acesta este punctul meu de vedere.*” - David Hilbert[14]

Prin vârful A al triunghiului ABC se duc două cercuri tangente la latura BC în vârfurile B, respectiv C şi fie L_a al doilea punct de întâlnire al lor. Analog, se obţin punctele L_b şi L_c. Cercul circumscris triunghiului $L_aL_bL_c$ se numeşte ***cercul ortocentroidal*** al triunghiuluiABC.

Teorema 1059 *Punctele L_a, L_b, L_c aparţin medianelor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $\{M_a\} = AL_a \cap BC$ (Figura 3.27). Din puterea punctului M_a

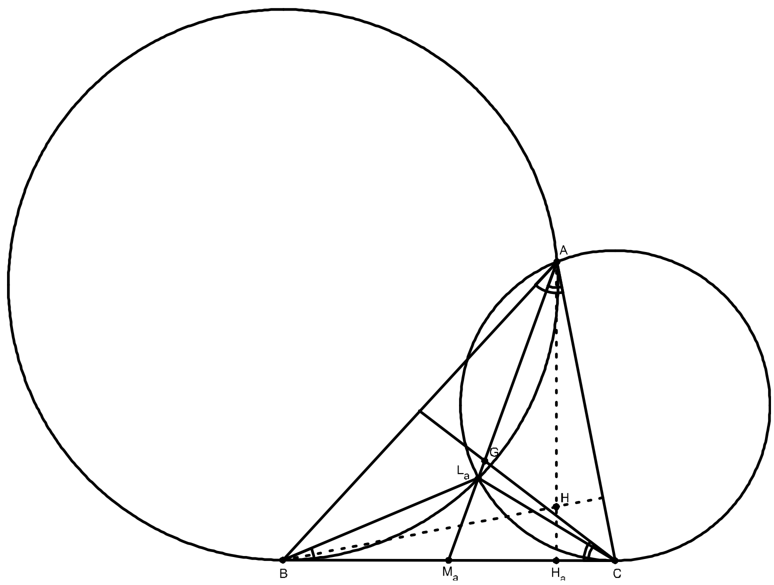

Figura 3.27: Cercul ortocentroidal

faţă de cele două cercuri rezultă:

$$M_aB^2 = M_aL_a \cdot M_aA = M_aC^2,$$

sau $M_aB = M_aC$, adică AM_a este mediană în triunghiul ABC. Analog se demonstrează că punctele L_b şi L_c aparţin medianelor BM_b şi CM_c ale triunghiului ABC. □

Teorema 1060 *Punctele L_a, L_b, L_c aparţin cercurilor circumscrise triunghiurilor BHC, AHC, respectiv AHB, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.*

[14] David Hilbert (1962-1943) – matematician german, profesor la Universitatea din Göttingen, contribuţii remarcabile în geometrie şi analiza matematică

Demonstraţie. Din $m(\sphericalangle L_aBC) = m(\sphericalangle BAL_a)$ şi $m(\sphericalangle L_aCB) = m(\sphericalangle L_aAC)$ rezultă: $m(\sphericalangle L_aBC) + m(\sphericalangle L_aCB) = m(\sphericalangle A)$. Atunci

$$m(\sphericalangle BL_aC) = 180^\circ - m(\sphericalangle L_aBC) - m(\sphericalangle L_aCB) = 180^\circ - m(\sphericalangle A).$$

Cum $m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$, rezultă $\sphericalangle L_aCB \equiv \sphericalangle BHC$, adică punctul L_a aparţine cercului circumscris triunghiului BHC. Analog, L_b şi L_c aparţin cercurilor circumscrise triunghiurilor AHC, respectiv AHB. □

Teorema 1061 *Fie $\{B_1\} = BL_a \cap AC$ şi $\{C_1\} = CL_a \cap AB$. Patrulaterul $AB_1L_aC_1$ este inscriptibil*

Demonstraţie. Din

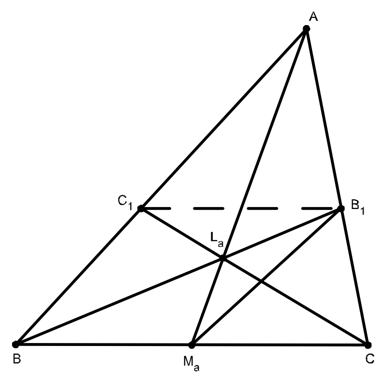

Figura 3.28: Patrulaterul $AB_1L_aC_1$ este inscriptibil

$$m(\sphericalangle BL_aC) = m(\sphericalangle B_1L_aC_1) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$$

rezultă că patrulaterul $AB_1L_aC_1$ este inscriptibil (Figura 3.28). □

Teorema 1062 *Punctele L_a, L_b, L_c aparţin cercului de diametru HG, unde H este ortocentrul şi G centrul de greutate al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $BB_1 \perp AC, B_1 \in AC$. Patrulaterul BHL_aC fiind inscriptibil rezultă $\sphericalangle BCL_a \equiv \sphericalangle B_1HL_a$.Dar $\sphericalangle BCL_a \equiv \sphericalangle L_aAC$,de unde $\sphericalangle L_aHB_1 \equiv \sphericalangle L_aAB_1$ adică patrulaterul HL_aB_1A este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle HB_1A) = m(\sphericalangle HL_aA) = 90^\circ$ rezultă că $m(\sphericalangle HL_aG) = 90^\circ$ (deoarece L_a aparţine medianei AA'). Am demonstrat că punctul L_a aparţine cercului de diametru HG. Analog, se demonstrează că şi punctele L_b şi L_c aparţin acestui cerc. □

Observaţia 1063 *Cercul ortocentroidal al triunghiului ABC mai poate fi definit ca fiind cercul având diametrul segmentul HG, unde H este ortocentrul, iar G centrul de greutate al triunghiului ABC.*

Teorema 1064 *Punctele* L_a, L_b, L_c *aparţin cercurilor circumscrise triunghiurilor ce au ca vârfuri mijloacele segmentelor* AH, BH, *respectiv* CH, *mijloacele segmentelor* H_bH_c, H_aH_c *respectiv* H_aH_b *şi punctele* A, B, *respectiv* C (H_a, H_b, H_c *sunt picioarele înălţimilor triunghiului* ABC).

Demonstraţie. Soluţia rezultă din teorema 1062. □

Teorema 1065 *Punctele* L_aL_b, L_c *aparţin cercurilor circumscrise triunghiurilor ce conţin ortocentrul triunghiului şi mijloacele înălţimilor duse din vârfurile* B *şi* C, A *şi* C, *respectiv* B *şi* A.

Demonstraţie. Soluţia rezultă din teorema 1062. □

Teorema 1066 *Punctul* L_a *aparţine arcurilor* $AB_1C_1, A'BC_1', A'A_1H, A'C'B''$ *şi* $A'B'C''$ (B'' *şi* C'' *fiind intersecţiile cercului* BHC *cu laturile* AB *şi* AC).

Demonstraţie. Soluţia rezultă din teorema 1062. □

Teorema 1067 *Dacă* K_a *este punctul în care axa ortică a triunghiului* ABC *intersectează latura* BC *atunci cercurile circumscrise triunghiurilor* K_aC_1C *şi* K_aB_1B *se întâlnesc în punctul* L_a.

Demonstraţie. Punctele B şi B_1 sunt inversele punctelor C şi C_1 în inversiunea de centru K_a şi raport K_aB, respectiv K_aC. Astfel, dreptele BB_1 şi CC_1 sunt inversele cercurilor K_aC_1C, respectiv K_aB_1B. Dar dreptele BB_1 şi CC_1 sunt concurente în H care este inversul lui L_a, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 1068 *Fie* H *ortocentrul şi* O *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC, B_1 *piciorul înălţimii din* B *şi* $\{B_2\} = CO \cap BB_1$. *Cercurile circumscrise triunghiurilor* AB_2B *şi* BHC *se intersectează în punctul* L_a *al cercului ortocentroidal.*

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle AOB) &= m(\sphericalangle HAC) \\ &= m(\sphericalangle HBC) \\ &= 90^\circ - m(\sphericalangle ACB), \end{aligned}$$

ceea ce arată că cercul circumscris triunghiului AB_2B este tangent laturii BC în B. Punctul de intersecţie L_a dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ABB_2 şi BHC se află pe cercul ortocentroidal după cum s-a definit acest cerc. □