3.10 CERCURILE LUI NEUBERG

„Pythagoras a sacrificat pe altarul lui Zeus o sută de boi şi acesta numai pentru un singur adevăr geometric. Dar dacă în zilele noastre am proceda în acelaşi fel, este puţin probabil că am putea găsi atâtea vite cornute pe întreg globul pământesc." - M. V. Lomonosov[15]

Teorema 1069 *Fie un triunghi ABC cu baza fixă BC. Să se determine locul geometric al vârfului A, dacă unghiul lui Brocard al triunghiului ABC este constant.*

Demonstraţie.

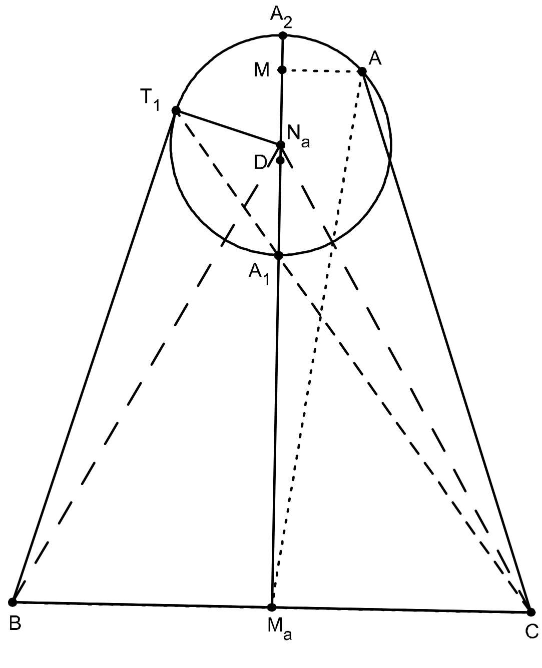

Figura 3.29: Cercurile lui Neuberg

Fie M punctul de intersecţie dintre paralela prin A la BC şi mediatoarea segmentului BC (Figura 3.29). Din teorema medianei rezultă $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$. Utilizând egalitatea

$$ctg\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot A_{[ABC]}} = \frac{3a^2 + 4m_a^2}{4a \cdot MM_a}$$

(M_a fiind mijlocul laturii BC) obţinem

$$m_a^2 - a \cdot MM_a \cdot ctg\omega + \frac{3}{4}a^2 = 0.$$

[15] Mihail Lomonosov (1711-1765) – savant, poet şi filolog rus

Considerăm punctul N_a pe MM_a astfel încât $N_aM_a = \frac{1}{2}a \cdot ctg\omega$ şi astfel $\sphericalangle BN_aM_a = \sphericalangle CN_aM_a = \omega$. Din teorema lui Pitagora generalizată rezultă:

$$\begin{aligned} N_aA^2 &= AM_a^2 + N_aM_a^2 - 2N_aM_a \cdot MM_a \\ &= m_a^2 + \left(\frac{1}{2}actg\omega\right)^2 - 2\frac{1}{2}actg\omega \cdot \frac{3a^2+4m_a^2}{4actg\omega} \\ &= \frac{1}{4}a^2(ctg^2\omega - 3) = k. \end{aligned}$$

Egalitatea precedentă arată că locul geometric căutat este un cerc (Na) cu centrul aflat în punctul N_a şi raza egală cu $n_a = \frac{1}{2}a\sqrt{ctg^2\omega - 3}$. □

Observaţia 1070

1) Analog, pe laturile AC şi AB se construiesc triunghiurile cu acelaşi unghi Brocard ca şi cel al triughiului ABC, vârful liber va descrie câte un cerc (Nb) şi (Nc), de raze $n_b = \frac{1}{2}b\sqrt{ctg^2\omega - 3}$, respectiv $n_c = \frac{1}{2}c\sqrt{ctg^2\omega - 3}$.

2) Cercurile $(Na), (Nb)$ şi (Nc) se numesc ***cercurile lui Neuberg***[16].

3) Triunghiul $N_aN_bN_c$ ale carui vârfuri sunt centrele cercurilor lui Neuberg se numeşte ***triunghiul lui Neuberg.***

Teorema 1071 *Razele cercurilor lui Neuberg, ale unui triunghi ABC sunt proporţionale cu lungimile laturilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Evident, deoarece

$$\frac{n_a}{a} = \frac{n_b}{b} = \frac{n_c}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{ctg^2\omega - 3}.$$

□

Teorema 1072 *Ecuaţia carteziană a cercului lui Neuberg (Na) în raport cu latura BC şi mediatoarea sa este:*

$$x^2 + y^2 - ayctg\omega + \frac{3a^2}{4} = 0.$$

Demonstraţie. Considerăm un reper cartezian cu centrul în mijlocul segmentului BC, axa absciselor fiind dreapta BC. Atunci, $N_a\left(0, \frac{1}{2}ctg\omega\right)$, deci ecuaţia cercului cu centrul în punctul N_a şi rază $\frac{1}{2}a\sqrt{ctg^2\omega - 3}$ este

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}actg\omega\right)^2 = \frac{1}{4}a^2(ctg^2\omega - 3)$$

sau $x^2 + y^2 - ayctg\omega + \frac{3a^2}{4} = 0$. □

[16] Joseph Neuberg (1840-1926) – matematician luxemburghez, preşedinte al Academiei Regale Belgiene, contribuţii importante în geometrie

Teorema 1073 *Distanţele de la centrele cercurilor lui Neuberg la centrul circumscris triunghiului ABC sunt proporţionale cu cuburile lungimilor laturilor triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din teorema sinusurilor în triunghiul ON_aB rezultă $\frac{ON_a}{\sin(A-\omega)} = \frac{R}{\sin\omega}$, de unde

$$ON_a = R\frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} = R \cdot \frac{a^2}{bc} = a^3 \cdot A_{[ABC]}.$$

Analog, $ON_b = b^3 \cdot A_{[ABC]}, ON_c = c^3 A_{[ABC]}$. □

Teorema 1074 *Este adevărată egalitatea: $ON_a \cdot ON_b \cdot ON_c = R^3$.*

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Teorema 1075 *Cercul lui Neuberg (Na) este ortogonal cercurilor cu centrele în punctele B şi C.*

Demonstraţie. Din teorema lui Pitagora în triunghiul N_aM_aB avem:

$$N_a^2B = N_aM_a^2 + BM_a^2 = \frac{a^2}{4}(ctg^2\omega + 1) = a^2 + n_a^2,$$

deci cercul (Na) şi cercurile având centrele în B şi C sunt ortogonale. □

Observaţia 1076 *Proprietăţi analoge se obţin pentru cercurile (Nb) şi (Nc).*

Teorema 1077 *Fie D şi D' puncte pe mediatoarea laturii BC a triunghiului ABC, astfel încât triunghiurile BCD şi BCD' sunt echilaterale. Pentru diferite valori ale unghiului lui Brocard al triunghiului ABC cercurile lui Neuberg au pe BC drept axă radicală.*

Demonstraţie. Fie A_1, A_2 punctele de intersecţie dintre M_aD şi cercul (Na), iar $\{T_1\} = CA_1 \cap (Na)$. Avem:

$$M_aA_1 \cdot M_aA_2 = M_aN_a^2 - n_a^2 = \frac{3}{4}a^2 = M_aD^2$$

şi

$$CA_1 \cdot CT_1 = CN_a^2 - n_a^2 = a^2 = CB^2 = CD^2,$$

adică triunghiurile CBA_1 şi CBT_1 sunt asemenea, deci

$$\frac{BT_1}{BA_1} = \frac{BC}{A_1C}.$$

Cum $A_1B \equiv A_1C$, rezultă $BT_1 \equiv BC \equiv BD$, deci BT_1 este tangentă cercului (Na) în punctul T_1. Analog, dacă $\{T_2\} = BA_2 \cap (Na)$, atunci CT_2 este tangent cercului (Na) în punctul T_2. □

Teorema 1078 *Dacă* A_1, A_2 *sunt punctele de intersecţie dintre mediatoarea laturii* BC *a triunghiului* ABC *cu cercul lui Neuberg* (Na)*, atunci*

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \omega)}{\sin \omega} = 2 \text{ şi } \frac{\sin(\varphi_2 + \omega)}{\sin \omega} = 2,$$

unde $\varphi_1 = m(\sphericalangle BA_1C)$ *şi* $\varphi_2 = m(\sphericalangle BA_2C)$.

Demonstraţie. Din asemanarea triunghiurilor BA_1C şi T_1BC rezultă $\sphericalangle T_1BC \equiv \sphericalangle BA_1C$. Din patrulaterul inscriptibil $BT_1N_aM_a$ rezultă $\sphericalangle BT_1M_a \equiv \sphericalangle BN_aM_a (= \omega)$. Unghiul $\sphericalangle T_1M_aC$ fiind exterior triunghiului T_1M_aB rezultă:

$$m(\sphericalangle T_1M_aC) = m(\sphericalangle BT_1M_a) + m(\sphericalangle T_1BM_a) = \omega + m(\sphericalangle BA_1C),$$

de unde

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \omega)}{\sin \omega} = \frac{\sin(\sphericalangle T_1M_aC)}{\sin(\sphericalangle BT_1M_a)} = \frac{BT_1}{BM_a} = \frac{BC}{BM_a} = 2.$$

Analog se arată că $\frac{\sin(\varphi_2+\omega)}{\sin \omega} = 2$. □

Teorema 1079 *Dacă* A_1, A_2 *sunt punctele de intersecţie dintre mediatoarea laturii* BC *a triunghiului* ABC *cu cercul lui Neuberg* (Na) *, atunci*

$$\begin{aligned} ctg\frac{\varphi_1}{2} &= ctg\omega - \sqrt{ctg^2\omega - 3}, \\ ctg\frac{\varphi_2}{2} &= ctg\omega + \sqrt{ctg^2\omega - 3}, \end{aligned}$$

unde $\varphi_1 = m(\sphericalangle BA_1C)$ *şi* $\varphi_2 = m(\sphericalangle BA_2C)$.

Demonstraţie. Avem:

$$\frac{A_1M_a}{M_aB} = \frac{M_aN_a}{M_aB} - \frac{N_aA_1}{M_aB}$$

sau

$$ctg\frac{\varphi_1}{2} = ctg\omega - \sqrt{ctg^2\omega - 3}$$

şi analog $\frac{A_2M_a}{M_aB} = \frac{M_aN_a}{M_aB} + \frac{N_aA_2}{M_aB}$ sau $ctg\frac{\varphi_2}{2} = ctg\omega + \sqrt{ctg^2\omega - 3}$. □

Observaţia 1080 *Unghiurile* $\frac{\varphi_1}{2}$ *şi* $\frac{\varphi_2}{2}$ *se numesc* ***unghiurile lui Steiner.***

Teorema 1081 *Dreptele* AN_a, BN_b, CN_c *sunt concurente.*

Demonstraţie. *Lemă*: *Pe laturile triunghiului* ABC *se construiesc în exterior (sau în interior) triunghiurile* $BC'A, AB'C, BA'C$ *isoscele şi asemenea. Dreptele* AA', BB', CC' *sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie $\{A''\} = AA' \cap BC$, $\{B''\} = BB' \cap AC$, $\{C''\} = CC' \cap AB$ şi $m(\sphericalangle A'BC) = m(\sphericalangle A'CB) = m(\sphericalangle B'CA) = m(\sphericalangle B'AC) = m(\sphericalangle C'AB) = m(\sphericalangle C'BA) = \alpha$ (Figura 3.30). Avem:

$$\frac{A''B}{B''A} = \frac{A_{[ABA']}}{A_{[ACA']}} = \frac{AB \cdot A'B \sin(B + \alpha)}{AC \cdot A'C \sin(C + \alpha)} = \frac{AB \cdot \sin(B + \alpha)}{AC \cdot \sin(C + \alpha)}.$$

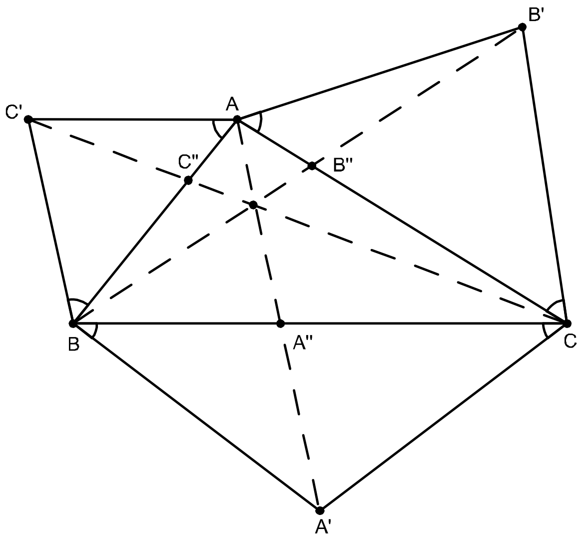

Figura 3.30: Dreptele AN_a, BN_b, CN_c sunt concurente

Analog se arată că $\frac{B''C}{B''A} = \frac{BC\sin(C+\alpha)}{BA\sin(A+\alpha)}$ şi $\frac{C''A}{C''B} = \frac{CA\sin(A+\alpha)}{CB\sin(B+\alpha)}$, de unde rezultă că

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Demonstraţia teoremei. Deoarece triunghiurile BCN_a, CAN_a, ABN_a sunt isoscele, având unghiurile de la bază egale cu $90° - \omega$, atunci rezultă că dreptele AN_a, BN_b, CN_c sunt concurente conform lemei. □

Teorema 1082 *Triunghiul lui Neuberg $N_aN_bN_c$ şi triunghiul ABC au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie.*Lemă*: *Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior (sau în interior) triunghiurile $BC'A, AB'C, BA'C$ isoscele şi asemenea. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare şi $\alpha = m(\sphericalangle A'BC)$. Punctul B se obţine prin rotaţia de centru A' şi unghi $(180° - 2\alpha)$ a punctului C, deci $b = a' + k(c - a')$, unde $k = \cos(\pi - 2\alpha) + i\sin(\pi - 2\alpha)$ şi de aici rezultă

$$a' = \frac{b - kc}{1 - k}.$$

Analog obţinem relaţiile: $b' = \frac{c-ka}{1-k}$ şi $c' = \frac{a-kb}{1-k}$. Afixul centrului de greutate al triunghiului $A'B'C'$ este egal cu:

$$g' = \frac{a' + b' + c'}{3} = \frac{a + b + c}{3} = g,$$

deci $G' \equiv G$.

Demonstraţia teoremei rezultă din lema de mai sus. □