

3.11 CERCUL LUI VAN LAMOEN

„Cu intuiția descoperi, cu logica stabilești.” J. Hadamard¹⁷

Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC , G centrul de greutate al triunghiului ABC , $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $GCM_b, GM_c B, GAM_c, GM_a C, GBM_a$, respectiv $GM_b A$ și P mijlocul segmentului $C_+ C_-$ (Figura 3.31).

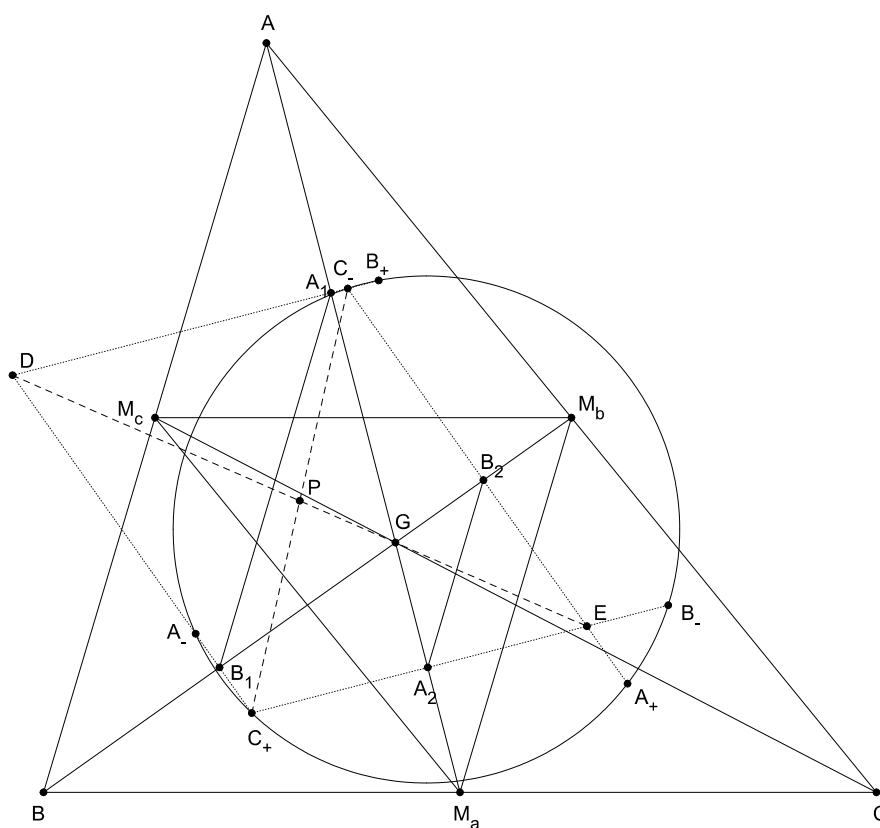


Figura 3.31: Cercul lui Van Lamoen

Teorema 1083 Fie $\{D\} = B_+ C_- \cap C_+ A_-$ și $\{E\} = A_+ C_- \cap C_+ B_-$. Patrulaterul $DC_+ EC_-$ este paralelogram.

Demonstrație. Deoarece DC_- este mediatoarea segmentului AG rezultă $DC_- \perp AM_a$ și $C_+ E$ este mediatoarea segmentului GM_a rezultă $C_+ E \perp AM_a$, deci $DC_- \parallel C_+ E$. Analog se arată că $DC_+ \parallel C_- E$, deci patrulaterul $DC_+ EC_-$ este paralelogram. \square

¹⁷J. Hadamard (1865-1963) – academician francez , profesor la Collège de France, contribuții importante în analiză și geometrie

Teorema 1084 *Punctele D, P, G și E sunt coliniare.*

Demonstrație. Fie A_1, A_2, B_1, B_2 mijloacele segmentelor AG, GM_a, BG , respectiv GM_b . Atunci $A_1B_1 \parallel AB, M_aM_b \parallel AB, A_2B_2 \parallel M_aM_b$ (A_1B_1, M_aM_b și A_2B_2 fiind linii mijlocii), de unde rezultă $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, deci triunghiurile DA_1B_1 și EA_2B_2 sunt omotetice, $\{G\} = B_1B_2 \cap A_1A_2$ fiind centrul omotetiei. Atunci, punctele D, G și E sunt coliniare. \square

Teorema 1085 *Dreapta DG trece prin mijlocul segmentului C_+C_- .*

Demonstrație. Deoarece DA_1 și DB_1 sunt mediatoarele segmentelor AG , respectiv BG rezultă concluzia. \square

Observația 1086 *Punctul D aparține mediatoarei segmentului AB .*

Teorema 1087 *Dreapta M_cD este simediana unghiului $\sphericalangle C_+DC_-$.*

Demonstrație. Deoarece $AB \parallel C_+C_-$ și $DM_c \perp AB$ rezultă $DM_c \perp C_+C_-$. Deoarece $GA_1 \perp DC_-, GB_1 \perp DC_+$ și $DM_c \perp C_+C_-$ rezultă că dreptele DG și DM_c sunt izogonale (vezi „Drepte izogonale”). Cum DP este mediană în triunghiul DC_+C_- rezultă că DM_c este simediana corespunzătoare $\sphericalangle C_+DC_-$. \square

Teorema 1088 *Dreapta DM_c trece prin mijlocul segmentului A_-B_+ .*

Demonstrație. Fie C_1 și C_2 cercurile circumscrise triunghiurilor GM_cB , respectiv GAM_c , $\{Q\} = DM_c \cap A_-B_+$. Fie $A_-A' \perp AB$ și $B_-B' \perp AB$, deci $A'A_- \parallel B'B_+$. Deoarece triunghiurile BM_cA_- și AM_cB_+ sunt isoscele rezultă $BA' \equiv A'M_c$ și $M_cB' \equiv B'A$; cum $BM_c \equiv M_cA$ rezultă $A'M_c \equiv M_cB'$. Deoarece $M_cQ \perp AB$, obținem $M_cQ \parallel A'A_-$, deci M_cQ este linie mijlocie în trapezul $A'A_-B_+B'$ adică Q este mijlocul segmentului A_-B_+ . \square

Observația 1089 *Deoarece DM_c este simediană în triunghiul DC_+C_- și Q este mijlocul segmentului A_-B_+ rezultă că A_-B_+ este antiparalela dreptei C_+C_- (vezi „Simediane”).*

Teorema 1090 *Punctele A_-, B_+, C_+ și C_- sunt conciclice.*

Demonstrație. Cum A_-B_+ este antiparalela dreptei C_+C_- , rezultă că patrulaterul $A_-B_+C_-C_+$ este inscribibil, deci punctele A_-, B_+, C_-, C_+ aparțin unui cerc (α). \square

Teorema 1091 *Punctele B_-, C_+, A_+, A_- , respectiv C_-, A_+, B_+, B_- sunt conciclice.*

Demonstrație. Soluție analogă cu precedentă. \square

Fie (β) și (γ) cercurile circumscrise patrulaterelor $B_-A_+C_+A_-$, respectiv $C_-B_-A_+A_-$.

Teorema 1092 (Teorema lui Van Lamoen) *Punctele $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-$ sunt conciclice.*

Demonstrație. Deoarece axele radicale A_-C_+ , A_+B_- și B_+C_- ale perechilor de cercuri considerate mai sus nu sunt concurente, rezultă că cercurile (α) , (β) și (γ) coincid, deci punctele A_+ , A_- , B_+ , B_- , C_+ , C_- sunt conciclice. \square

Observația 1093 *Cercul ce trece prin punctele A_+ , A_- , B_+ , B_- , C_+ , C_- se numește cercul lui Van Lamoen.*

3.12 CERCUL LUI CONWAY

„Se desenează pe nisip un cerc/după care se taie în două,
cu același băț de alun se taie în două./După aceea se cade în genunchi,
după aceea se cade în brânci./După aceea se izbește cu fruntea nisipul
și i se cere iertare cercului./Atât.” – Nichita Stănescu ¹⁸

Teorema 1094 *În prelungirea laturilor triunghiului ABC se construiesc segmentele $AA_1 \equiv AA_2 \equiv BC$, $BB_1 \equiv BB_2 \equiv AC$, $CC_1 \equiv CC_2 \equiv AB$. Punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.*

Demonstrație. Fie $m(\sphericalangle A) = \alpha$, $m(\sphericalangle B) = \beta$, $m(\sphericalangle C) = \gamma$ și a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB . Deoarece $BC_2 = BA_1 = a + c$ rezultă că triunghiul BA_1C_2 este isoscel, deci $m(\sphericalangle BC_2A_1) = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. Deoarece $CA_2 = CB_1 = b + c$ rezultă că triunghiul CBA_2 este isoscel, deci $m(\sphericalangle CA_2B_1) = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$. Triunghiul AA_2A_1 fiind isoscel rezultă $m(\sphericalangle AA_2A_1) = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Atunci,

$$m(\sphericalangle B_1C_2A_1) + m(\sphericalangle B_1A_2A_1) = \frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 180^\circ,$$

deoarece $\alpha + \beta + \lambda = 180^\circ$, deci patrulaterul $B_1C_2A_1A_2$ este inscriptibil. Analog, se arată că patrulaterul $A_2B_1B_2C_1$ este inscriptibil, deci punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice (Figura 3.32). \square

Observația 1095 *Cercul pe care se află punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ se numește cercul lui Conway corespunzător triunghiului ABC .*

Teorema 1096 *Centrul cercului lui Conway este punctul I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC .*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile AB_2C_1 și A_1BC_2 sunt isoscele rezultă că bisectoarele AI , respectiv BI sunt și mediatoarele segmentelor B_2C_1 , respectiv A_1C_2 , deci I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC – este centrul cercului Conway corespunzător triunghiului ABC . \square

¹⁸Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române