Demonstraţie. Deoarece axele radicale A_-C_+, A_+B_- şi B_+C_- ale perechilor de cercuri considerate mai sus nu sunt concurente, rezultă că cercurile $(\alpha), (\beta)$ şi (γ) coincid, deci punctele $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-$ sunt conciclice. □

Observaţia 1093 *Cercul ce trece prin punctele $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-$ se numeşte **cercul lui Van Lamoen.***

3.12 CERCUL LUI CONWAY

„Se desenează pe nisip un cerc/după care se taie în două,
cu acelaşi băţ de alun se taie în două./După aceea se cade în genunchi,
după aceea se cade în brânci./După aceea se izbeşte cu fruntea nisipul
şi i se cere iertare cercului./Atât." – Nichita Stănescu [18]

Teorema 1094 *În prelungirea laturilor triunghiului ABC se construiesc segmentele $AA_1 \equiv AA_2 \equiv BC$, $BB_1 \equiv BB_2 \equiv AC$, $CC_1 \equiv CC_2 \equiv AB$. Punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice.*

Demonstraţie. Fie $m(\sphericalangle A) = \alpha, m(\sphericalangle B) = \beta, m(\sphericalangle C) = \gamma$ şi a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB. Deoarece $BC_2 = BA_1 = a + c$ rezultă că triunghiul BA_1C_2 este isoscel, deci $m(\sphericalangle BC_2A_1) = \frac{180° - \beta}{2}$. Deoarece $CA_2 = CB_1 = b + c$ rezultă că triunghiul CBA_2 este isoscel, deci $m(\sphericalangle CA_2B_1) = \frac{180° - \gamma}{2}$. Triunghiul AA_2A_1 fiind isoscel rezultă $m(\sphericalangle AA_2A_1) = \frac{180° - \alpha}{2}$. Atunci,

$$m(\sphericalangle B_1C_2A_1) + m(\sphericalangle B_1A_2A_1) = \frac{180° - \beta}{2} + \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} = 180°,$$

deoarece $\alpha + \beta + \lambda = 180°$, deci patrulaterul $B_1C_2A_1A_2$ este inscriptibil. Analog, se arată că patrulaterul $A_2B_1B_2C_1$ este inscriptibil, deci punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice (Figura 3.32). □

Observaţia 1095 *Cercul pe care se află punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ se numeşte **cercul lui Conway** corespunzător triunghiului ABC.*

Teorema 1096 *Centrul cercului lui Conway este punctul I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiurile AB_2C_1 şi A_1BC_2 sunt isoscele rezultă că bisectoarele AI, respectiv BI sunt şi mediatoarele segmentelor B_2C_1, respectiv A_1C_2, deci I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC – este centrul cercului Conway corespunzător triunghiului ABC. □

[18] Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

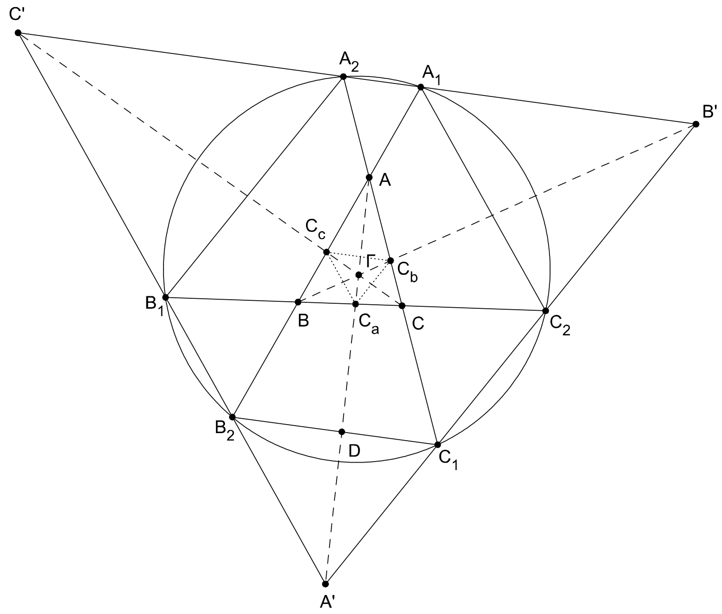

Figura 3.32: Cercul lui Conway

Teorema 1097 *Sunt adevărate relaţiile:* $A_1A_2 \parallel B_2C_1$, $B_1B_2 \parallel C_2A_1$, $C_1C_2 \parallel A_2B_1$.

Demonstraţie. Deoarece $AI \perp A_1A_2$ şi $AI \perp B_2C_1$ rezultă $A_1A_2 \parallel B_2C_1$. Analog $B_1B_2 \parallel C_2A_1$, $C_1C_2 \parallel A_2B_1$. □

Teorema 1098 *Dacă* r *este raza cercului înscris în triunghiul* ABC *şi* p *semiperimetrul triunghiului* ABC*, atunci raza cercului Conway este egală cu* $\sqrt{r^2+p^2}$.

Demonstraţie. În triunghiul isoscel B_2IA_1 ($IA_1 = IB_2 = R_C$ - raza Conway), fie P proiecţia lui I pe A_1B_2, deci $IP = r$. Avem: $IB_2^2 = IP^2 + PB_2^2$ adică $R_C^2 = r^2 + p^2$, de unde

$$R_C = \sqrt{r^2+p^2}$$

(deoarece $PB_2 = \frac{1}{2}A_1B_2 = \frac{1}{2}(a+b+c) = p$). □

Teorema 1099 *Intersecţiile dreptelor* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *determină un triunghi omotetic cu triunghiul de contact* $C_aC_bC_c$ *al triunghiului* ABC*, centrul de omotetie fiind punctul lui Gergonne al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie $\{A'\} = B_1B_2 \cap C_1C_2, \{B'\} = A_1A_2 \cap C_1C_2, \{C'\} = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Deoarece triunghiul AC_aC_b este isoscel rezultă că

$$m(\sphericalangle AC_cC_b) = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle A)}{2},$$

deci $\sphericalangle A_2A_1A \equiv \sphericalangle AC_cC_b$, de unde $A_1A_2 \parallel C_cC_b$. Analog se arată că $B_1B_2 \parallel C_aC_c$ şi $C_1C_2 \parallel C_aC_b$, deci triunghiurile $C_aC_bC_c$ şi $A'B'C'$ sunt omotetice. Fie $\{D\} = AC_a \cap B_2C_1$. În triunghiul AB_2C_1, considerând ceviana AD şi secanta BC avem:

$$\frac{AB}{AB_2} \cdot \frac{AC_1}{AC} \cdot \frac{C_aC}{C_aB} \cdot \frac{DB_2}{DC_1} = 1$$

(vezi [12, § II.15]) de unde $\frac{DB_2}{DC_1} = \frac{(p-b)\cdot b}{(p-c)\cdot c}$ (i) (am ţinut cont că $AB_2 = AC_1 = b + c, C_aC = p - c$ şi $C_aB = p - b$). Fie $\{D_1\} = A'C_a \cap B_2C_1$. Avem:

$$\frac{A'B_2}{A'B_1} \cdot \frac{A'C_2}{A'C_1} \cdot \frac{D_1C_1}{D_1B_1} \cdot \frac{C_aB_1}{C_aC_1} = 1. \qquad \text{(ii)}$$

Din teorema sinusurilor aplicată triunghiurilor $C_aC_bC_c$ şi $A'B_1C_2$ rezultă $\frac{A'B_1}{\sin(90^\circ - \frac{C}{2})} = \frac{A'C_2}{\sin(90^\circ - \frac{B}{2})}$ şi $\frac{C_aC_c}{\sin \sphericalangle C_aC_bC_c} = \frac{C_aC_b}{\sin \sphericalangle C_aC_cC_b}$ de unde:

$$\frac{A'B_1}{A'C_2} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \text{ şi } \frac{C_aC_c}{C_aC_b} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad \text{(iii)}$$

Deoarece $B_1C_1 \parallel C_aC_b \parallel B'C'$ rezultă $\frac{A'B_2}{A'C_1} = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{C_aC_c}{C_aC_b}$ (iv). Din relaţiile (ii) - (iv) rezultă:

$$\frac{A'B_2}{A'C_1} \cdot \frac{A'C_2}{A'B_1} \cdot \frac{C_aB_1}{C_aC_2} = \frac{D_1B_2}{D_1C_1}$$

adică

$$\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \cdot \frac{p}{p} = \frac{D_1B_2}{D_1C_1}$$

şi de aici

$$\frac{D_1B_2}{D_1C_2} = \left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2 = \frac{\frac{p(p-b)}{ac}}{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{(p-b)b}{(p-c)c}. \qquad \text{(v)}$$

Din relaţiile (i) şi (v) rezultă $\frac{DB_2}{DC_1} = \frac{D_1B_2}{D_1C_2}$, adică $D \equiv D_1$. Astfel, punctele A, C_a, D şi A' sunt coliniare. Analog, se arată că B, C_b şi B' respectiv C, C_c şi C' sunt coliniare, deci centrul de omotetie este punctul Γ de intersecţie al dreptelor AC_a, BC_b şi CC_c - adică punctul lui Gergonne. □

Teorema 1100 *Intersecţiile dreptelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 determină un triunghi omologic cu triunghiul ABC, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Proprietatea este o consecinţă a aplicaţiei precedente. □