Teorema 1102 *Centrul cercului Adams este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Din congruenţa triunghiurilor IC_aP, IC_aQ, IC_bR, IC_bS, IC_cU, IC_cT rezultă

$$IP \equiv IQ \equiv IR \equiv IS \equiv IT \equiv IU,$$

deci centrul cercului înscris în triunghiul ABC este centrul cercului lui Adams. □

Teorema 1103 *Sunt adevărate relaţiile:* $UR \perp AI, TQ \perp BI, PS \perp CI$.

Demonstraţie. Deoarece triunghiul AUR este isoscel, iar dreptele AR şi AU sunt tangente crecului înscris în triunghiul ABC, rezultă că $UR \perp AI$; analog se arată că $TQ \perp BI, PS \perp CI$. □

3.14 CERCUL LUI BROCARD[21]

„Operele matematice robesc şi încântă tocmai ca operele pasiunii şi imaginaţiei." - Ion Barbu

Fie K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC. Paralele duse prin K la laturile BC, CA, AB intersectează mediatoarele acestor laturi în punctele A_1, B_1, respectiv C_1. Triunghiul $A_1B_1C_1$ se numeşte ***primul triunghi al lui Brocard***. Fie A_2, B_2, C_2 proiecţiile punctului O-centrul cercului circumscris triunghiuluiABC- pe simedianele duse din vârfurile A, B, C. Triunghiul $A_2B_2C_2$ se numeşte ***al doilea triunghi al lui Brocard***. Cercul având diametru segmentul OK se numeşte ***cercul lui Brocard*** (Figura 3.34).

Observaţia 1104 *Două triunghiuri care au acelaşi unghi Brocard se numesc echibrocardiene. Bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor AGA_1, BGB_1, CGC_1 se numesc axele lui Steiner (G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC).*

Teorema 1105 *Cercul lui Brocard este circumscris triunghiurilor lui Brocard.*

Demonstraţie. Deoarece $m(\sphericalangle KA_1O) = m(\sphericalangle KB_1O) = m(\sphericalangle KC_1O) = 90°$, rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 aparţin cercului lui Brocard. Analog pentru punctele A_2, B_2, C_2. □

Teorema 1106 *Triunghiurile AB_1C, BC_1A, CA_1B sunt isoscele şi asemenea.*

[21] Henri Brocard (1845-1922) – matematician francez, contribuţii importante în geometrie

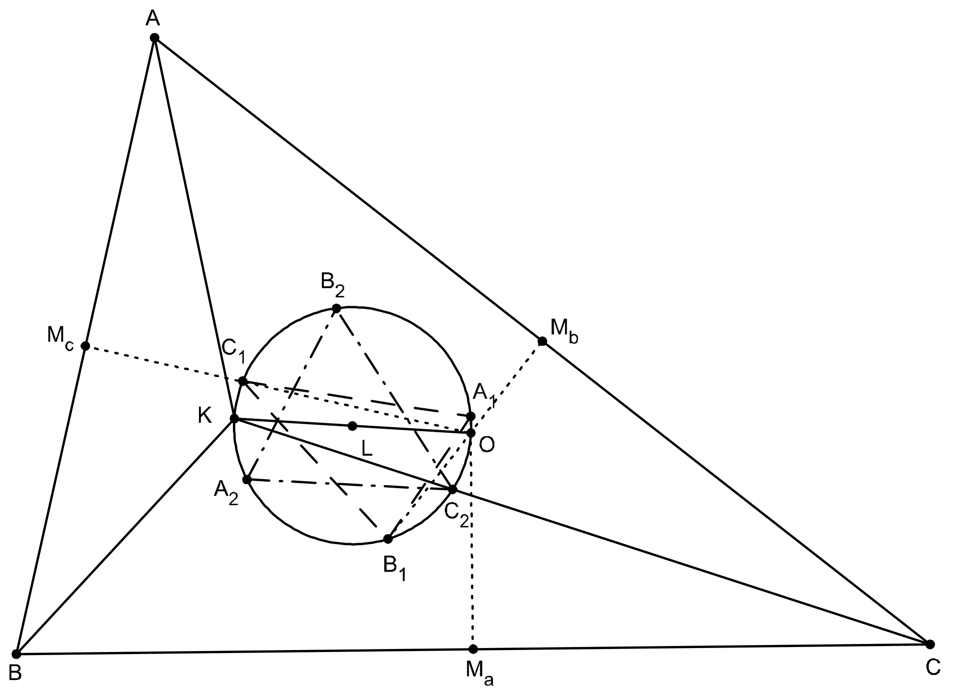

Figura 3.34: Cercul lui Brocard

Demonstraţie. Deoarece punctele A_1, B_1, C_1 aparţin mediatoarelor laturilor triunghiului ABC, rezultă că triunghiurile AB_1C, BC_1A, CA_1B sunt isoscele. Deoarece A_1M_a, B_1M_b, C_1M_c sunt egale cu distanţele de la K la laturile BC, CA, AB, rezultă

$$\frac{A_1M_a}{a} = \frac{B_1M_b}{b} = \frac{C_1M_c}{c}$$

(unde M_a, M_b, M_c sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB), adică $\frac{A_1M_a}{BM_a} = \frac{B_1M_b}{CM_b} = \frac{C_1M_c}{AM_a}$ şi cum

$$m(\sphericalangle BM_aA_1) = m(\sphericalangle CM_bB_1) = m(\sphericalangle AM_cC_1) = 90°,$$

rezultă că triunghiurile BM_aA_1, CM_bA şi AM_cC_1 sunt asemenea. Atunci, triunghiurile BA_1C, CB_1A şi AC_1B sunt asemenea. □

Teorema 1107 *Dreptele A_1B, B_1C şi C_1A sunt concurente într-un punct Brocard.*

Demonstraţie. În triunghiul BA_1M_a avem:

$$tg(\sphericalangle A_1BM_a) = \frac{A_1M_a}{BM_a} = \frac{KK_1}{BC/2} = tg\omega,$$

(unde K_1 este proiecţia lui K pe BC), deci $\sphericalangle A_1BM_a$ este egal cu unghiul lui Brocard ω, de unde rezultă că A_1B, B_1C, C_1A sunt ceviene ce determină unul dintre punctele lui Brocard. □

Teorema 1108 *Dreptele AB_1, BC_1, CA_1 sunt concurente într-un punct Brocard.*

Demonstraţie.În triunghiul AB_1M_b avem: $tg(\sphericalangle B_1AM_b) = \frac{B_1M_b}{AM_b} = \frac{KK_2}{AC/2} = tg\omega$ (unde K_2este proiecţia lui K pe AC), deci $\sphericalangle B_1AC$ este egal cu unghiul lui Brocard, adică A_1B, B_1C, C_1A sunt ceviene ce determină unul din punctele lui Brocard. □

Observaţia 1109 *Dacă $\{\Omega\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$, atunci $\{\Omega'\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$; dacă $\{\Omega\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$, atunci $\{\Omega'\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$.*

Teorema 1110 *Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie $\{B'\} = KA_1 \cap AC, \{C'\} = KA_1 \cap AB$, L mijlocul segmentului OK. Deoarece punctele B' şi C'sunt puncte pe al doilea cerc al lui Lemoine (cu centrul în punctul L) rezultă că proiecţia lui L pe coarda $B'C'$este punctul A"- mijlocul acestui segment (i). În triunghiul dreptunghic KOA_1, $(m(\sphericalangle KA_1O) = 90°)$, LA'' este linie mijlocie, deci A'' este şi mijlocul segmentului KA_1 (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) obţinem că $C'K = A_1B'$, deci dreapta AA_1 este dreapta izotomică simedianei AK. Analog se arată că BB_1 şi CC_1 sunt izotomicele simedianelor concurente în punctul izotomic punctului lui Lemoine Ω''. □

Observaţia 1111

i) Punctul de concurenţă al dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se numeşte ***al treilea punct al lui Brocard*** corespunzător triunghiului ABC.

ii) Din cele prezentate mai sus se poate spune că primul triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ este triomologic cu triunghiul ABC, centrele de omologie fiind punctele lui Brocard Ω, Ω' şi izotomicul punctului lui Lemoine (al treilea punct al lui Brocard Ω'').

iii) $\Omega\Omega'$ se numeşte ***dreapta lui Brocard***.

Consecinţa 1112 *Vârfurile primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ se găsesc pe dreptele izotomice ale simedianelor triunghiului ABC.*

Teorema 1113 *Primul triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ al triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Avem $m(\sphericalangle A\Omega B) = 180° - m(\sphericalangle B)$ (vezi „Punctele lui Brocard"), deci $m(\sphericalangle C_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle C_1B_1A_1) = m(\sphericalangle B)$ (i); $m(\sphericalangle B\Omega C) = 180° - m(\sphericalangle C)$, de unde:

$$m(\sphericalangle B_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle B_1C_1A_1) = m(\sphericalangle C). \quad \text{(ii)}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea. □

Teorema 1114 *Primul triunghi al lui Brocard al unui triunghi ABC, triunghiul $\Omega\Omega'\Omega''$ şi triunghiul ABC au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.21]. □

Teorema 1115 *Cercul lui Brocard trece prin punctele Brocard Ω şi Ω' ale triunghiului ABC.*

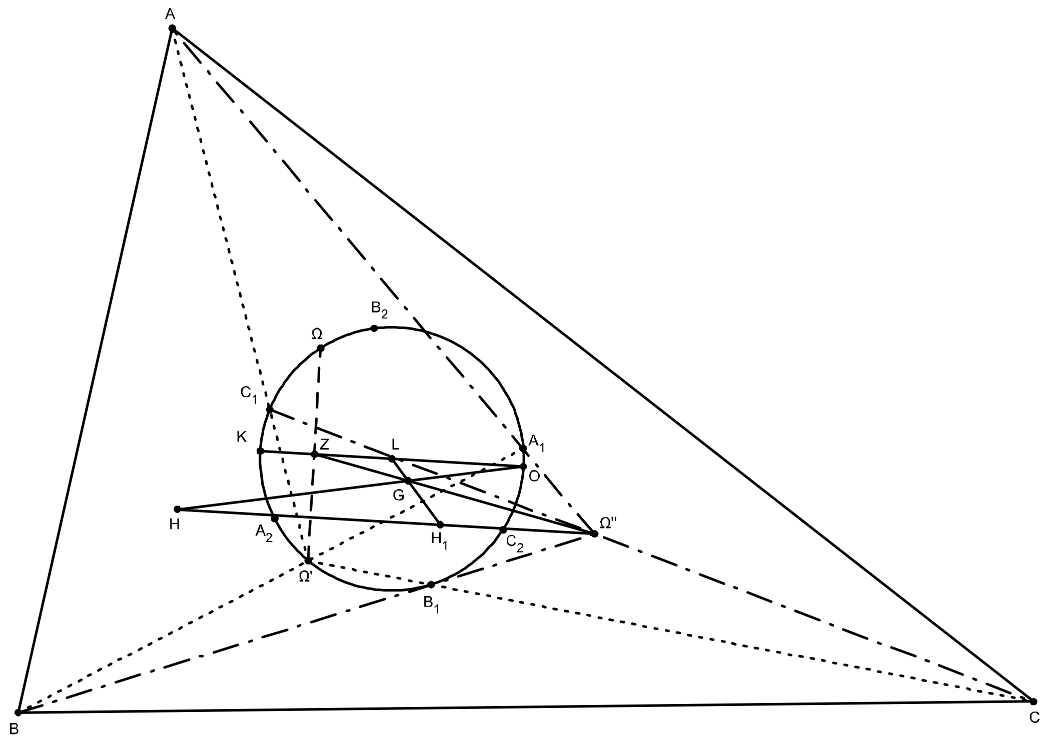

Figura 3.35: Punctele lui Brocard

Demonstraţie. Din proprietatea 1106 rezultă că triunghiul A_1M_aC şi B_1M_bA sunt asemenea, astfel

$$\sphericalangle M_aA_1C \equiv \sphericalangle M_bB_1A \equiv \sphericalangle OB_1\Omega',$$

deci patrulaterul $A_1OB_1\Omega'$ este inscriptibil. Atunci, Ω' aparţine cercului lui Brocard. Analog, se arată că Ω aparţine cercului lui Brocard. □

Teorema 1116 *Punctele lui Brocard Ω şi Ω' ale triunghiului ABC sunt simetrice faţă de diametrul OK.*

Demonstraţie. Avem

$$m(\sphericalangle \Omega OK) = m(\sphericalangle \Omega B_1K) = \frac{1}{2}m(\widehat{KA_2\Omega})$$

şi deoarece $KB_1 \parallel AC$ rezultă $m(\sphericalangle \Omega B_1K) = m(\sphericalangle \Omega CA) = \omega$, deci $m(\sphericalangle \Omega OK) = \omega$ (Figura 3.35). Analog, $m(\sphericalangle \Omega' OK) = m(\sphericalangle \Omega' A_1K) = m(\sphericalangle \Omega' CB) = \omega$, deci $\sphericalangle \Omega OK \equiv \sphericalangle \Omega' OK$, adică punctele Ω şi Ω' sunt simetrice faţă de dreapta OK. □

Teorema 1117 *Raza cercului lui Brocard este egală cu*

$$R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}.$$

Demonstraţie. În triunghiul dreptunghic $K\Omega O$ avem:

$$KO = \frac{\Omega O}{\cos\omega} = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{\cos\omega} = 2R_\omega,$$

de unde raza cercului Brocard este egală cu $R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}$. □

Teorema 1118 *Raza cercului lui Brocard este egală cu*

$$R_\omega = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}.$$

Demonstraţie. Deoarece $OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ (vezi „Punctul lui Lemoine”), rezultă $R_\omega = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$. □

Teorema 1119 *Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC. Atunci, $H\Omega'' \parallel OK$.*

Demonstraţie. Fie$\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Figura 3.35). Deoarece G este centrul de greutate al triunghiurilor ABC şi $\Omega\Omega'\Omega''$ rezultă $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{GZ}{G\Omega''} = \frac{1}{2}$, de unde obţinem $H\Omega'' \parallel OK$. □

Teorema 1120 *Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC. Atunci,*

$$H\Omega'' = 2R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}.$$

Demonstraţie. Fie$\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$. Din triunghiul $O\Omega Z$ rezultă $OZ = O\Omega\cos\omega = R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$, deci $H\Omega'' = 2OZ = 2R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$. □

Teorema 1121 *Ortocentrul primului triunghi Brocard aparţine dreptei $H\Omega''$.*

Demonstraţie. Fie L centrul cercului lui Brocard şi $\{H_1\} = LG \cap H\Omega''$. Deoarece L este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ şi G centrul său de greutate rezultă că dreapta LG este dreapta lui Euler a primului triunghi Brocard. Cum

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} = \frac{LG}{GH_1},$$

rezultă că H_1 este ortocentrul primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$. □

Consecinţa 1122 *Patrulaterul KOH_1H este paralelogram.*

Demonstraţie. Deoarece $HH_1 \parallel OK$ şi $HH_1 = 2LO = OK$ rezultă că KOH_1H este paralelogram. □

Consecinţa 1123 *Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC aparţine dreptei KH_1.*

Demonstraţie. Deoarece într-un paralelogram diagonalele se înjumătăţesc rezultă concluzia. □

Teorema 1124 *Punctul lui Tarry, centrul de greutate şi centrul cercului lui Brocard corespunzător unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstraţie. Din asemănarea poligoanelor $TACSB$ şi $OA_1C_1KB_1$ (vezi „Punctul lui Tarry”), punctele G, O, T se corespund cu punctele G, L, respectiv O şi de aici rezultă $\widehat{OGT} \equiv \widehat{LGO}$, deci punctele T, L, G sunt coliniare. □

Teorema 1125 *Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry şi O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Atunci,*

$$OG^2 = GL \cdot GT.$$

Demonstraţie. Deoarece punctele G, O, T respectiv G, L, O formează figuri omoloage, rezultă $\frac{GO}{GL} = \frac{GT}{GO}$, de unde $OG^2 = GL \cdot GT$. □

Teorema 1126 *Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry şi O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Atunci,*

$$GT = \frac{R\cos\omega}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}} \cdot GO.$$

Demonstraţie. Din asemănarea triunghiurilor GLO şi GOT rezultă

$$\frac{GO}{GT} = \frac{GL}{GO} = \frac{LO}{OT} = \frac{R_\omega}{R},$$

deci $GT = \frac{R}{R_\omega} \cdot GO = \frac{R\cos\omega}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}} \cdot GO$. □

Teorema 1127 *Al treilea punct Brocard Ω'' aparţine dreptei ce uneşte punctele lui Steiner şi Tarry corespunzătoare unui triunghi ABC.*

Demonstraţie. Fie H_1 ortocentrul primului triunghi al lui Brocard şi $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Figura 3.35). Atunci,

$$\frac{H_1\Omega''}{ZL} = \frac{H_1G}{GL} = 2,$$

iar

$$\begin{aligned} ZL &= OZ - OL \\ &= R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega} - \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega} \\ &= \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega} \cdot \cos 2\omega \end{aligned}$$

şi de aici $H_1\Omega'' = 2LZ$. Avem:

$$\frac{H_1T}{LT} = \frac{TG + 2GL}{GT - LG},$$

din $\frac{GT}{GL} = \frac{R^2}{R_\omega^2}$, rezultă

$$\frac{TG + 2GL}{GL} = \frac{R^2 + 2R_\omega^2}{R_\omega^2}$$

şi

$$\frac{TG - GL}{GL} = \frac{R^2 - R_\omega^2}{R_\omega^2},$$

de unde

$$\frac{H_1T}{LT} = \frac{R^2 + 2R_\omega^2}{R^2 - R_\omega^2} = 2\cos 2\omega.$$

Dar $\frac{H_1\Omega''}{LO} = 2\cos 2\omega$, deci $\frac{H_1\Omega''}{LO} = \frac{H_1T}{LT}$ şi cum $H_1\Omega'' \parallel LO$ rezultă că Ω'' aparţine dreptei TO. □

Teorema 1128 *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC. Atunci, $O\Omega'' = R(2\cos 2\omega - 1)$.*

Demonstraţie. Din asemănarea triunghiurilor $\Omega'' H_1 T$ şi OLT rezultă $\frac{T\Omega''}{TO} = \frac{H_1T}{LT} = 2\cos 2\omega$ şi de aici $\frac{T\Omega'' - TO}{TO} = 2\cos 2\omega - 1$ sau $O\Omega'' = R(2\cos 2\omega - 1)$. □

Teorema 1129 *Dreapta $O\Omega$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2\cos 2\omega - 1) = O\Omega^2$, rezultă concluzia. □

Teorema 1130 *Dreapta $O\Omega'$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega'\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2\cos 2\omega - 1) = O\Omega'^2$ rezultă concluzia. □

Teorema 1131 *Punctele A_2, B_2, C_2 aparţin cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, AOB.*

Demonstraţie. Deoarece două simediane exterioare şi o simediana interioară ale unui triunghi sunt concurente (vezi „Simediana exterioară"), atunci simediana AK şi tangentele în B, respectiv C la cercul circumscris triunghiului ABC sunt concurente în punctul T_A (Figura 3.36). Deoarece $m(\sphericalangle OCT_A) = 90°$ rezultă că OT_A este diametru în cercul circumscris triunghiului BOC. Deoarece $OA_2 \perp AT_A$ rezultă $m(\sphericalangle OA_2T_A) = 90°$, adică A_2 este punct pe cercul circumscris triunghiului BOC. Analog se arată că B_2 şi C_2 sunt pe cercurile circumscrise triunghiurilor COA, respectiv AOB. □

Observaţia 1132 *Un cerc care trece prin două vârfuri ale unui triunghi şi este tangent la una din laturile triunghiului se numeşte cerc adjunct.*

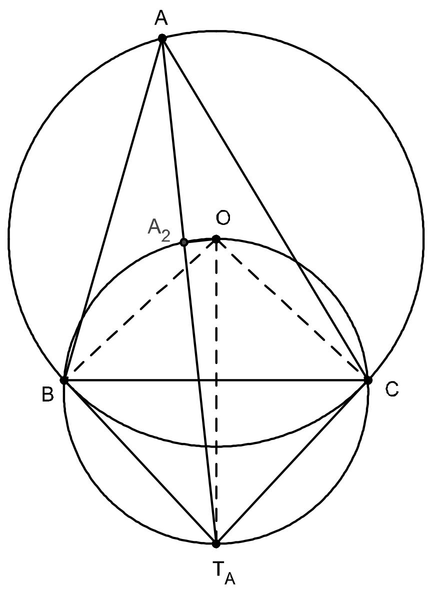

Figura 3.36: Cerc adjunct

Teorema 1133 *Punctul A_2 se află la intersecţia cercurilor adjuncte vârfului A.*

Demonstraţie. Deoarece $\sphericalangle BA_2T_A \equiv \sphericalangle BCT_A \equiv \sphericalangle BAC$ rezultă că cercul circumscris triunghiului BA_2A este tangent în A laturii AC. Analog, cercul circumscris triunghiului CA_2A este tangent în A laturii AB. □

Observaţia 1134 *Punctele B_2 şi C_2 se află la intersecţia cercurilor adjuncte vârfurilor B, respectiv C. Vârfurile celui de-al doilea triunghi Brocard al triunghiului ABC sunt intersecţiile dintre cercurile adjuncte corespunzătoare vârfurilor A, B, C.*

Teorema 1135 *Coordonatele unghiulare ale vârfurilor celui de al doilea triunghi Brocard $A_2B_2C_2$ sunt:*

$$(180^\circ - m(\sphericalangle A), 2m(\sphericalangle A), 180^\circ - m(\sphericalangle A)),$$
$$((180^\circ - m(\sphericalangle B), 180^\circ - m(\sphericalangle B), 2m(\sphericalangle B)),$$
$$(2m(\sphericalangle C), 180^\circ - m(\sphericalangle C), 180^\circ - m(\sphericalangle C)).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BA_2A) &= 180^\circ - m(\sphericalangle BA_2T_A) = 180^\circ - m(\sphericalangle A), m(\sphericalangle CA_2A) \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle T_AA_2C) = 180^\circ - m(\sphericalangle A), \end{aligned}$$

iar $m(\sphericalangle BA_2C) = 360^\circ - [m(\sphericalangle BA_2A) + m(\sphericalangle CA_2A)] = 2m(\sphericalangle A)$. Analog se determină coordonatele unghiulare ale vârfurilor B_2 şi C_2. □

Teorema 1136 *Cercul Brocard şi primul cerc Lemoine sunt concentrice.*

Demonstraţie. Deoarece ambele cercuri au centrul în punctul L, mijlocul segmentului OK, rezultă concluzia. □