3.15 CERCURILE ŢIŢEICA - CARNOT[22]

„Geometria este limbajul omului... de la naşterea sa, omul nu a acţionat decât pe fundamentul geometriei, pe care a pătruns-o cu atâta claritate încât putem admite că ea este aceea care ne condiţionează." - Charles le Corbusier[23]

Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCH, ACH, ABH. $\Delta O_aO_bO_c$ se numeşte *triunghiul Ţiţeica-Carnot*, iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC, AHB se numesc *cercurile Ţiţeica-Carnot* - (τ_a), (τ_b), (τ_c).

Teorema 1137 *Cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC şi AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $AH, BH, CH, H_a, H_b, H_c$

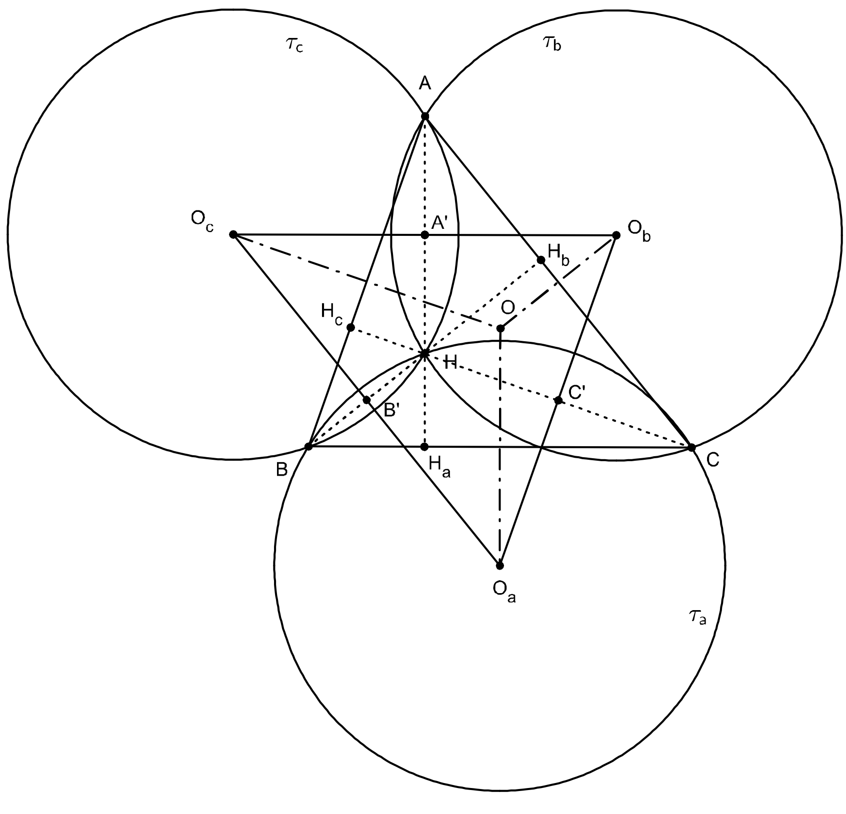

Figura 3.37: Cercurile lui Ţiţeica

picioarele înalţimilor triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului

[22] Lazare Carnot (1753-1823) – matematician şi inginer francez
[23] Charles le Corbusier (1877-1965) – arhitect, pictor francez de origine elveţiană

ABC şi $O_a^{'}$ simetricul lui O faţă de BC (Figura 3.37). Atunci, $AH \equiv OO_a^{'}$ şi $AH \parallel OO_a^{'}$ de unde rezultă că patrulaterul OO_aHA este paralelogram. Deci, $HO_a^{'} \equiv OA(= R)$ (i) şi cum OCO_aB este romb rezultă că

$$O_a^{'}C = O_a^{'}B = OC = OB(= R). \qquad \text{(ii)}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că

$$O_a^{'}C = O_a^{'}B = O_a^{'}H(= R),$$

deci $O_a^{'}$ este centrul cercului circumscris triunghiului BHC, adică $O_a^{'} \equiv O_a$. Analog, O_b şi O_c sunt simetricele lui O în raport cu laturile AC, respectiv AB. Cercul circumscris triunghiului BHC este congruent cu cercul circumscris ABC. Analog, cercurile circumscrise triunghiurilor AHC şi AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC. □

Observaţia 1138

1) Laturile triunghiului Ţiţeica-Carnot conţin punctele lui Euler (A', B', C') ale triunghiului ABC.

2) Distanţele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la centrele O_a, O_b, O_c sunt egale cu AH, BH, respectiv CH.

3) Centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot sunt simetricele centrului cercului circumscris (O) al triunghiului ABC faţă de laturile triunghiului ABC.

4) Punctul H este centrul cercului circumscris triunghiului Ţiţeica-Carnot.

Teorema 1139 *Triunghiurile $O_aO_bO_c$ şi ABC sunt congruente.*

Demonstraţie. Cum BO_aCO şi $AOCO_b$ sunt romburi rezultă: $BO_a \parallel OC \parallel AO_b$ şi $BO_a = OC = AO_b(= R)$, deci patrulaterul ABO_aO_b este paralelogram, adică $AB = O_aO_b$. Analog, $AC = O_aO_c$ şi $BC = O_bO_c$, triunghiurile $O_aO_bO_c$ şi ABC sunt congruente. □

Teorema 1140 *Triunghiurile $O_aO_bO_c$ şi ABC sunt omotetice.*

Demonstraţie. *Soluţia* 1. Fie O_9 mijlocul segmentului OH. Atunci, triunghiul $O_aO_bO_c$ se obţine prin omotetia de centru O_9 şi raport -1, a triunghiului ABC.

Soluţia 2. Deoarece $O_aO_b||AB, O_bO_c||BC$ şi $O_aO_c||AC$, iar triunghiul ABC şi $O_aO_bO_c$ sunt congruente, rezultă că triunghiurile sunt omotetice. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $O(0)$. Notăm cu $a, b, c, h, o_1, o_2, o_{3,} o_9$ afixele punctelor A, B, C, H, O_a, O_b, respectiv O_c. Atunci, $H(a + b + c)$, iar centrul cercului lui Euler $O_9\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$. Patrulaterele AO_cHO_b, BO_aHO_c, CO_bHO_a fiind paralelograme rezultă $a + h = o_3 + o_2, b + h = o_1 + o_3$, $c + h = o_1 + o_2$, de unde $o_1 + o_2 + o_3 = 2(a + b + c) = 4o_9$, $o_1 = 4o_9 - (a + 2o_9) = 2o_9 - a = b + c$, $o_2 = 2o_9 - b = a + c$, $o_3 = 2o_9 - c = a + b$. Deoarece $\frac{a-o_9}{o_1-o_9} = -1 \in R$ rezultă ca punctele A, O_9, O_1 sunt coliniare. Analog, B, O_9, O_2 şi C, O_9, O_3 sunt coliniare, deci centrul de omotetie dintre triunghiurile ABC, $O_1O_2O_3$ este centrul lui Euler. □

Teorema 1141 *Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC este mijlocul segmentelor* AO_a, BO_b, CO_c.

Demonstraţie. Din $\frac{a-o_9}{o_{a1}-o_9} = -1$ rezultă $|a - o_9| = |o_a - o_9|$ adică $AO_9 \equiv O_9O_a$. Analog, $BO_9 \equiv O_9O_b$ şi $CO_9 \equiv O_9O_c$. □

Teorema 1142 *Triunghiurile* $O_aO_bO_c$ *şi ABC au acelaşi cerc al lui Euler şi aceeaşi dreaptă a lui Euler.*

Demonstraţie. În triunghiul $O_aO_bO_c$, O este ortocentrul său, iar H este centrul cercului circumscris, deci are aceeaşi dreaptă Euler cu triunghiul ABC şi evident acelaşi cerc al lui Euler. □

Teorema 1143 *Cercurile lui Ţiţeica-Carnot sunt simetrice cercului circumscris triunghiului dat în raport cu laturile corespunzatoare.*

Demonstraţie. Deoarece H aparţine cercului circumscris triunghiului BHC, simetricul lui H faţă de BC aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC şi ABC sunt congruente, rezultă că cele două cercuri sunt simetrice faţă de BC. □

Teorema 1144 *Fie* A_1, B_1, C_1 *punctele de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale triunghiurilor A, B, respectiv C cu cercul circumscris triunghiului ABC. Triunghiul* $O_1O_2O_3$*, având vârfurile în centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot ale triunghiului* $A_1B_1C_1$ *este omologic cu triunghiul ABC, centrul de omologie fiind un punct al lui Kariya al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Kariya”. □

Teorema 1145 *Fie H ortocentrul unui triunghi ABC,*$(\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$ *cercurile Ţiţeica-Carnot corespunzătoare triunghiului ABC, iar* A_b *şi* A_c *al doilea punct de intersecţie dintre cercul* (τ_a) *cu laturile AC respectiv AB. Analog se definesc punctele* B_c *şi* B_a*, respectiv* C_a *şi* C_b *determinate de intersecţiile cercurilor* (τ_b)*, respectiv* (τ_c) *cu laturile corespunzatoare ale triunghiului ABC. Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercurilor circumscrise triunghiurilor* AA_bA_c*,*BB_cB_a*,*CC_aC_b.

Demonstraţie. Avem

$$m(\widehat{HAH_c}) = 90^\circ - m(\widehat{H_cHA}) = 90^\circ - m(\widehat{H_aHC}) = m(\widehat{HCH_a}) \qquad \text{(i)}$$

În cercul (τ_a),

$$m(\widehat{BA_cH}) = m(\widehat{HCB}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BH}) \qquad \text{(ii)}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\widehat{HAB} \equiv \widehat{AA_cH}$, deci triunghiul AHA_c este isoscel, de unde $AH \equiv HA_c$ (iii). Analog se arată că $AH \equiv HA_b$ (iv). Din relatiile (iii) şi (iv) rezultă

$$AH \equiv HA_c \equiv HA_b,$$

deci H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c. Analog, se arată că H este centrul cercului circumscris triunghiurilor BB_cB_a şi CC_aC_b (Figura 3.38). □

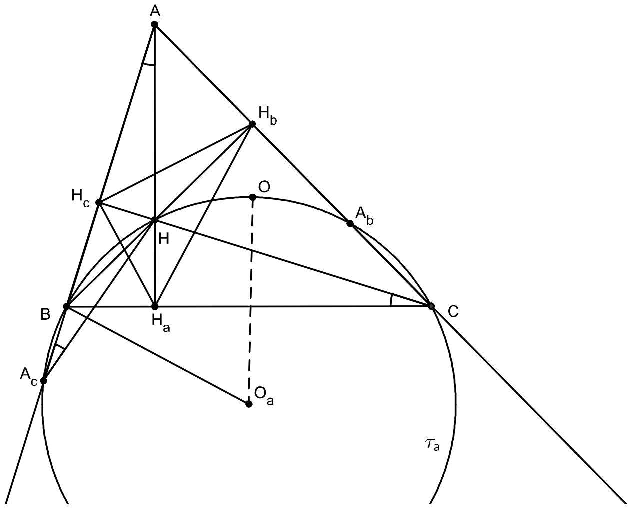

Figura 3.38: H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c

Teorema 1146 *Fie O_a centrul cercului Ţiţeica-Carnot (τ_a) şi $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Atunci: $BO_a \perp H_aH_b$ şi $CO_a \perp H_aH_c$.*

Demonstraţie. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci $OC \perp H_aH_b$ (i) (vezi [12, § III.1]) (Figura 3.38). Patrulaterul $BOCO_a$ fiind un romb - datorită faptului că O_a este simetricul lui O faţă de BC - rezultă $BO_a \parallel OC$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că $BO_a \perp H_aH_b$. Analog, se arată $CO_a \perp H_aH_c$. $\square$

Observaţia 1147 *Analog se arată că $AO_b \perp H_bH_a$, $CO_b \perp H_bH_c$, $AO_c \perp H_cH_a$, $BO_c \perp H_cH_b$.*

Teorema 1148 *Tangentele duse în ortocentrul H al unui triunghi ABC la cercurile Ţiţeica-Carnot $(\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$ intersectează laturile BC, CA, respectiv AB în trei puncte coliniare.*

Demonstraţie. Fie A', B', C' punctele determinate de intersecţiile dintre tangentele şi laturile triunghiului, iar A'', B'', C'' al doilea punct de intersecţie dintre dreptele AH, BH, CH cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 3.39). Avem

$$m(\sphericalangle BCC'') = m(\sphericalangle BB''C'') = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BC''})$$

şi cum $A'H$ este tangentă cercului (Ca) rezultă $m(\sphericalangle A'HB) = m(\sphericalangle HCB)$, de unde $\sphericalangle A'HB \equiv \sphericalangle C''B''B$, deci dreptele $A'H$ şi $B''C''$ sunt paralele. Fie $\{M\} = B''C'' \cap BC$. Din asemanarea triunghiurilor$A'BH$ cu MBB''şi $A'HC$ cu MCC'' rezultă: $\frac{A'B}{MA'} = \frac{BH}{HB''}$ şi $\frac{A'C}{MA'} = \frac{HC}{HC''}$, de unde

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{HC''}{HB''}.$$

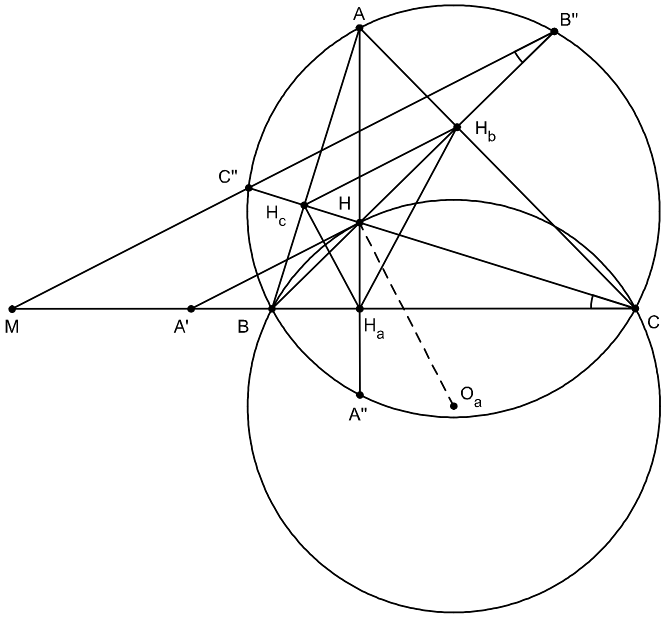

Figura 3.39: Tangente în H la cercurile lui Ţiţeica

Analog, se arată că

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CH}{HA} \cdot \frac{HA''}{HC''} \text{ şi } \frac{C'A}{C'B} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{HB''}{HA''}.$$

Atunci $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare. □

Teorema 1149 *Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC. Ortocentrele triunghiurilor AC_bC_c, BC_aC_c, CC_aC_b sunt centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot ale triunghiului $C_aC_bC_c$.*

Demonstraţie. Fie C_cC_c' şi C_bC_b' înalţimi în triunghiul AC_bC_c şi H_1 ortocentrul triunghiului AC_bC_c. Atunci $C_cC_c' \parallel IC_b$ şi $C_bC_b' \parallel IC_c$, deci patrulaterul $IC_bH_1C_c$ este paralelogram (Figura 3.40). Cum $IC_c \equiv IC_b$ rezultă că patrulaterul $IC_bH_1C_c$ este romb, deci H_1 este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului de contact faţă de latura C_bC_c, ceea ce arată că H_1 este centrul cercului Carnot corespunzator laturii C_bC_c. Analog, se arată că ortocentrele triunghiurilor BC_aC_c şi CC_aC_b sunt centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot corespunzatoare laturilor C_aC_c, respectiv C_bC_a. □

Teorema 1150 *Fie H ortocentrul unui triunghi ABC, $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic $\{H_1\} = AH_a \cap H_bH_c$,$\{H_2\} = BH_b \cap H_aH_c$,$\{H_3\} = CH_c \cap H_aH_b$. Dreptele H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 sunt axele radicale dintre cercul lui Euler al triunghiului ABC şi respectiv cercurile Ţiţeica-Carnot $(\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler”. □

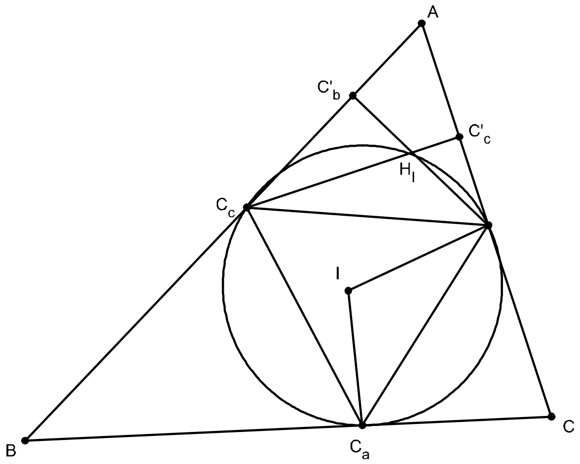

Figura 3.40: Centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot ale triunghiului $C_aC_bC_c$.

Teorema 1151 *Triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot şi triunghiurile având vârfurile în punctele unde înălţimea triunghiului dat intersectează cercul său circumscris sunt omologice, centrul de omologie aparţinând acestui cerc ciscumscris.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Kariya”. □

Teorema 1152 *Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC şi $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic. Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b sunt centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot corespunzătoare triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie M proiecţia lui B pe bisectoarea CI şi $\{A_1\} = H_cM \cap AI$. Avem:

$$\widehat{AH_cH_b} \equiv \widehat{ACB} \text{ şi } \widehat{MH_cA} \equiv \widehat{MCB}(= \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}))$$

(deoarece patrulaterele H_cH_bCB şi H_cMCB sunt inscriptibile) (Figura 3.41) de unde rezultă că

$$m(\widehat{AH_cA_1}) = m(\widehat{AH_cM}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AH_cH_b}),$$

deci H_cA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{AH_cH_b}$. Cum AA_1 este bisectoarea unghiului A, rezultă că A_1 este centrul cercului înscris în triunghiul AH_cH_b.Dar

$$m(\widehat{IA_1M}) = m(\widehat{A_1AH_c}) + m(\widehat{A_1H_cA}) = \frac{1}{2}m(\hat{A}) + \frac{1}{2}m(\hat{C})$$

şi

$$m(\widehat{MIA_1}) = m(\widehat{MIA}) = m(\widehat{IAC}) + m(\widehat{ICA}) = \frac{1}{2}m(\hat{A}) + \frac{1}{2}m(\hat{C}),$$

de unde rezultă că

$$\widehat{IA_1M} \equiv \widehat{MIA_1}.$$

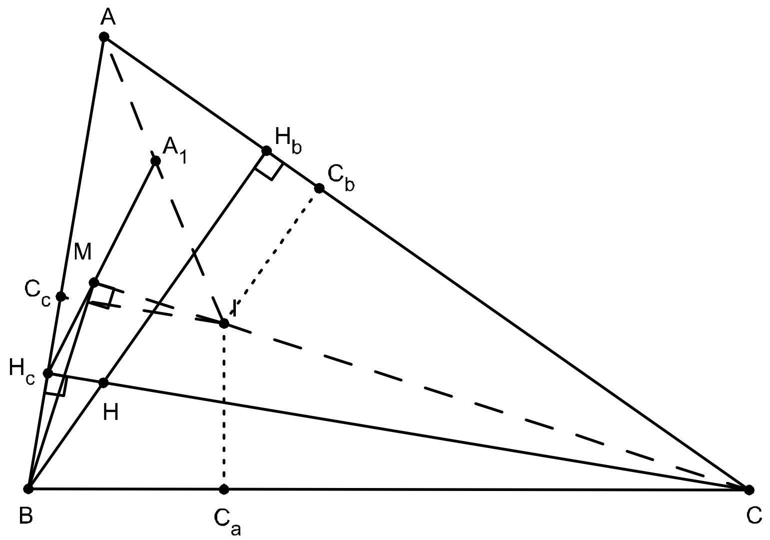

Figura 3.41: Centrele cercurilor Ţiţeica-Carnot corespunzătoare triunghiului $C_aC_bC_c$

Arătăm că punctul M aparţine dreptei C_cC_b. Fie $\{M_1\} = CI \cap C_cC_b$. Avem:

$$m(\widehat{BIM_1}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})]$$

(ca unghi exterior triunghiului BIC), $m(\widehat{BIM_1}) = 90° - \frac{1}{2}m(\hat{A})$. Patrulaterul IC_cAC_b este inscriptibil, deci $m(\widehat{IC_cC_b}) = \frac{1}{2}m(\hat{A})$, de unde $m(\widehat{BC_cM_1}) = 90° + \frac{1}{2}m(\hat{A})$. Astfel,

$$m(\widehat{BC_cM_1}) + m(\widehat{MIB}) = 180°,$$

adică patrulaterul BC_cM_1I este inscriptibil, deci

$$m(\widehat{BM_1I}) = m(\widehat{BC_cI}) = 90°,$$

de unde rezultă că M_1 este proiecţia lui B pe bisectoarea C_1, adică $M_1 \equiv M$. Deoarece $AI \perp C_bC_c$, $M \in C_bC_c$ şi triunghiul MA_1I este isoscel, rezultă că punctele A_1 şi I sunt simetrice faţă de latura C_cC_b, deci A_1 este centrul cercului Ţiţeica-Carnot corespunzător laturii C_cC_b a triunghiului de contact. □